UN ARBRE DE PYTHAGORE
QUI POUSSE COMME UN CHEVEU

Carole LE BELLER[1]

I. GENESE DE L'ACTIVITE

1. *Une idée qui a fait son chemin*

En 2003, au collège René Goscinny[2], la possibilité d'initier et de coordonner un projet interdisciplinaire m'est offerte dans le cadre d'un itinéraire de découverte (idd) en $4^{\text{ème}}$. Instantanément, dans ma tête, c'est avec les arts plastiques que je souhaite partager, sous l'angle des mathématiques, le thème *Illusions d'optique et de mouvement*. C'est une manière de faire découvrir à une grande masse d'élèves ma passion pour les mathématiques et les arts, et tout particulièrement pour de magnifiques bizarreries mathématiques. En fonction de nos compétences, ma collègue d'arts plastiques et moi sommes en position de recherche collaborative intense pour pouvoir proposer et co-animer les séances d'idd.

Dans son article *Les fractals de Pythagore*, Francis Casiro[3] présente les arbres de Pythagore. Il est question de construire trois figures semblables sur les trois côtés d'un triangle rectangle isocèle, l'aire de la figure construite sur l'hypoténuse étant égale à la somme des aires des figures construites sur chacun des deux côtés de l'angle droit. Puis il s'agit de remplacer chacun des deux carrés des côtés de l'angle droit par une figure de Pythagore. Au fil des itérations, un arbre de Pythagore se dessine.

A la lecture de cet article, correspondant complètement à notre progression de notions, l'idée d'en construire un est suggérée. Les élèves découvrent la notion de fractale en conclusion des sujets enchevêtrés et liés tels que : la perspective, les illusions d'optiques, les anamorphoses, les solides impossibles, les pavages, et les illusions de mouvement. **Dans toutes les phases du projet, les élèves sont acteurs, co-auteurs et auteurs**. Des objets fractals et la notion de dimension fractale sont montrés par les exemples : du chou-fleur (à décortiquer en classe), de la longueur de la côte bretonne, du flocon de neige (courbe de Von Koch), et de présentations d'ensembles de géométrie fractale de Mandelbrot et Julia. C'est l'occasion d'échanger sur des notions et du vocabulaire tels que, entre autres : la mise en abyme[4], l'autosimilarité et les itérations, le zoom et les échelles, la symétrie axiale et la symétrie centrale.

En classe, par binôme, ils découvrent, génèrent et explorent des fractales numériques à l'aide du logiciel *Tiera Zon* [5] (cf. *Fig. 3*). Le sujet des fractales est dense. Malheureusement, par manque de temps, la construction de l'arbre n'est restée qu'à l'état d'idée.

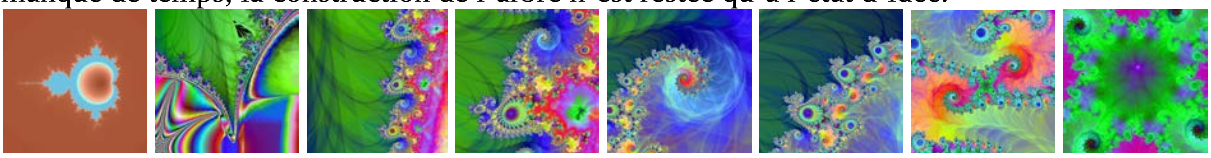
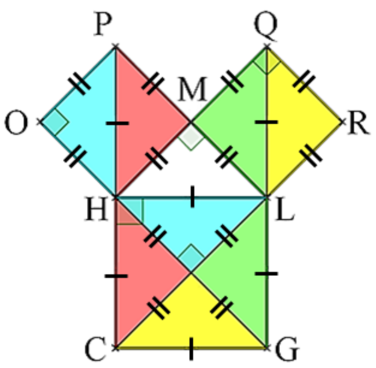


Fig. 3 - *L'une de mes explorations d'une zone de l'ensemble de Mandelbrot avec le logiciel Tiera Zon*

[1] : Carole LE BELLER, professeure de mathématiques, IREM de Rennes et Ifé.
[2] : Collège public multisites des villes de Céaucé et de Passais La Conception dans l'Orne.
[3] : Casiro, F., 1998, *Pythagore & Thalès*, ACL – Les Éditions du Kangourou, *Les fractals de Pythagore*, p.33-35.
[4] : « ABYME ou ABYSME n. f. Seulement dans la locution *En abyme*, *en abysme*. LITTÉRATURE. BX-ARTS. *Mise en abyme*, *construction en abyme* ou (rare) *en abîme*, procédé par lequel on intègre dans un récit, dans un tableau, un élément signifiant de ce récit ou de ce tableau, qui entretient avec l'ensemble de l'œuvre une relation de similitude. » Extrait du Dictionnaire de l'Académie Française, 9e édition.
[5] : Stephen C. Ferguson, 1998, logiciel gratuit *Tiera Zon*, http://1998.tierazon.com/Tierazon/Tierazon.html

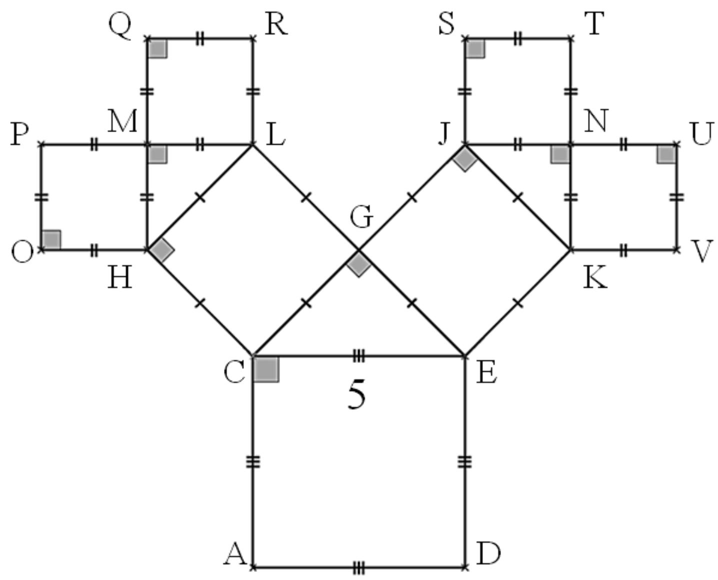
2. *La première réalisation*

Ce n’est qu’**en 2009** que le premier arbre de Pythagore, de hauteur $75\sqrt{2}$ cm ≈ 106,1 cm et de largeur $110\sqrt{2}$ cm ≈ 155,6 cm, a vu le jour au collège public Les Ormeaux à Rennes. Pour préparer mon activité, je reprends mes vieux documents oubliés, j’ajuste et vérifie mes calculs afin que l’arbre soit réalisable et positionnable au mur dans l’espace vide à gauche du tableau blanc nouvellement accroché. A partir de petites fiches de questions, les élèves de ma classe de 4ème construisent chacun une figure composée de celle de Pythagore associée à un triangle rectangle isocèle (cf. *Fig. 1, itération 2*). Un arbre de Pythagore (cf. *Fig. 2, itération 7*) leur est présenté. Il s’agit de le construire en partant du carré le plus grand de la figure 1 itération 2. La construction de l’arbre s’effectue en partant de ses branches vers sa racine. On imagine que cet arbre *pousse comme un cheveu* et non comme un arbre réel. C’est-à-dire qu’un arbre devient l’une des branches d’un plus grand arbre et ainsi de suite. Ce choix de construction, utilisant la symétrie axiale, offre la possibilité de faire construire un arbre à plusieurs classes. Chaque classe construit son arbre. Les arbres identiques, construits puis assemblés, permettent d’en construire un plus grand et ainsi de suite.



L’aire du grand carré de longueur de côté $HL = c_1$ est égale à la somme des aires des petits carrés de longueur de côtés $HM = ML = c_0$.
Le triangle HML est rectangle isocèle en M
Egalité de Pythagore : $c_1{}^2 = 2c_0{}^2$

Itération 1



Itération 2

Fig. 1 - *Figures d’étapes de construction d’un arbre de Pythagore réalisées avec GeoGebra*

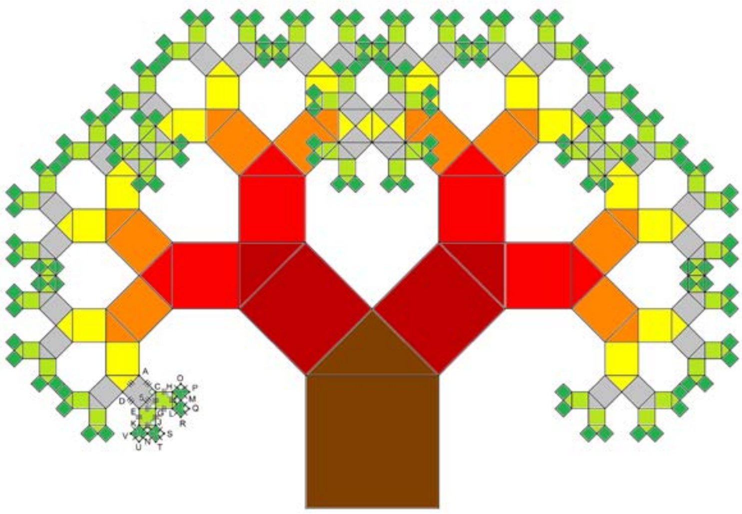


Fig. 2 - *Un arbre de Pythagore à la 7-ième itération réalisé avec GeoGebra*

Puis par groupes, après avoir répondu à la question : « *L'arbre pourra-t-il être placé sous le tableau ou à gauche du tableau ?* », ils s'organisent pour construire l'arbre (cf. *Fig. 2, itération 7*). Ensuite, les élèves cherchent à la maison ce qu'est *un(e) fractal(e)* et qui est Benoît Mandelbrot. Après des échanges et la visualisation du diaporama sur les fractal(e)s, pour clore l'activité, ils utilisent individuellement le logiciel *Tiera Zon* pour générer et explorer des fractales.

II. EVOLUTION DE L'ACTIVITE

1. 2010, une année pas comme les autres

En 2010, je renouvelle l'activité avec ma classe de 4ème et exploite l'arbre dans d'autres notions : cercle circonscrit à un triangle rectangle, agrandissement-réduction, et puissances. L'arbre est terminé. Le 14 octobre 2010, Benoît Mandelbrot décède. Des élèves semblent touchés par l'importance des recherches du mathématicien. J'ai le sentiment que l'arbre de Pythagore est plus important cette année-là que la précédente, et qu'il prend plus de sens.

Fig. 4 - *Un arbre de Pythagore de hauteur* $75\sqrt{2}$ cm ≈ 106,1 cm *et de largeur* $110\sqrt{2}$ cm ≈ 155,6 cm

2. Recherche magique

En 2011, faisant partie du groupe de recherche formation[6] de l'IREM de Rennes[7] et de l'Ifé[8] sur la démarche d'investigation (DI), je renouvelle l'activité en laissant davantage de place pour les questionnements et la recherche par les élèves. Le reste de l'activité est moins guidé que les autres années.

Je convaincs sans difficultés Catherine Pépin[9], québécoise, professeure de mathématiques, remplaçante en France, de faire participer sa classe de 4ème à la réalisation d'un plus grand arbre (commun à deux classes). Pressée par le temps pour boucler l'activité avant la fin de son remplacement, elle donne aux élèves une autre consigne que celle prévue. Six groupes d'élèves se lancent dans la construction d'une branche d'arbre de la taille de l'arbre d'origine (une hauteur d'environ 106,1 cm et une largeur d'environ 155,6 cm). Un mercredi midi,

[6] : Membres du GRF DI IREM de Rennes et Ifé (2011-2013) : Gueudet Ghislaine, Grodowski Sonia, Le Beller Carole, Lebaud Marie-Pierre, Pépino Christophe, Rouault Yann.
[7] : Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques de Rennes : http://www.irem.univ-rennes1.fr/
[8] : Institut français d'éducation : http://ife.ens-lyon.fr/ife
[9] : Catherine Pépin est professeure de mathématiques au Québec. Lors d'un séjour long en France, elle a effectué des remplacements en collège et en lycée.

Catherine me sollicite pour obtenir du papier de couleur. C'est à cet instant que nous réalisons, toutes les deux, que nous risquions de nous retrouver avec six arbres en plus de celui de ma classe pour en faire un commun. Nous trouvons l'idée géniale. Il me reste à solliciter une autre collègue de mathématiques pour faire la branche manquante. Mais quelle taille aurait-t-il ? Ensemble, calculatrice dans une main et marqueur dans l'autre, nous griffonnons au tableau des esquisses de figures et des calculs. Nous finissons par photocopier plusieurs arbres (cf. *Fig. 2, itération 7*) et les fixons au tableau avec de la pâte à fixer. Nous recommençons nos calculs. Nous partons avec le mètre enrouleur dans la salle d'à côté qui a un mur entier vide d'affichage… Puis dans le couloir… Puis dans la cage d'escalier… Stupeur ! Gros éclats de rire d'accents français et québécois mélangés ! L'arbre n'irait que dans la cage d'escalier tellement il serait grand ! Nos esprits retrouvés, l'installation de l'arbre dans la cage d'escalier étant trop dangereuse, nous décidons, avant qu'il ne soit trop tard, de faire réduire la *productivité* intense des élèves de Catherine afin qu'ils ne réalisent que trois arbres. Le dernier jour au collège pour Catherine, à l'heure de midi, professeures et élèves, nous fixons au mur l'arbre de Pythagore associé à un triangle rectangle isocèle. Plus tard, la branche manquante est faite par une autre classe de 4ème conduite par une autre professeure du collège mais sans privilégier la démarche d'investigation.

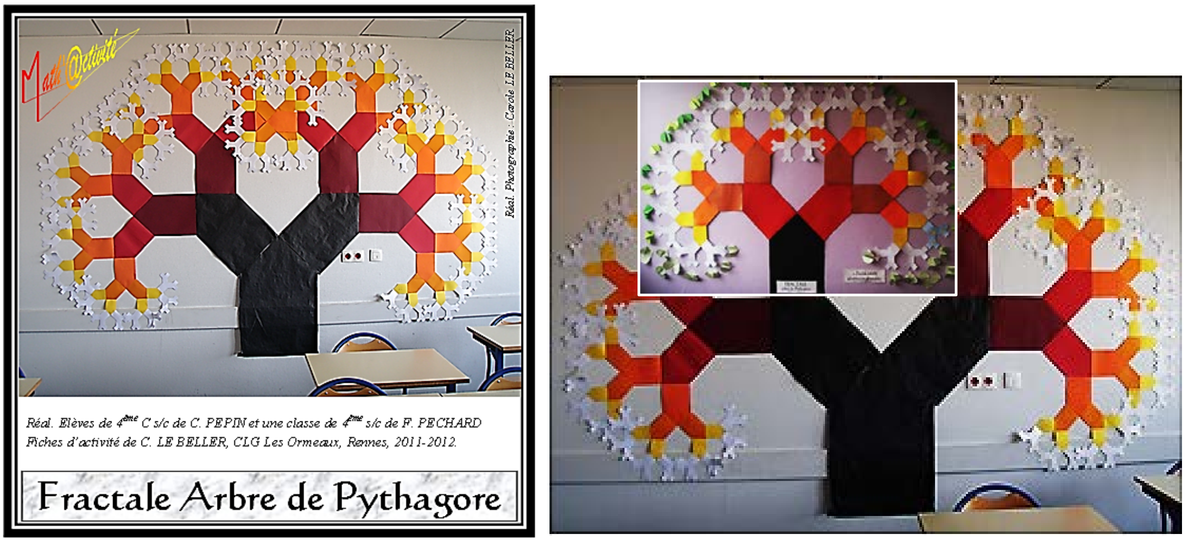


Fig. 5 - *Un arbre de Pythagore à quatre branches identiques à l'arbre fig. 4*

3. *Vers l'utilisation d'une démarche d'investigation*

Durant le reste de l'année scolaire, l'exploitation de l'activité est repensée. L'expérience magique vécue me confirme que les élèves doivent vivre **des moments forts de recherche** à leur portée un peu comme celui que nous avons vécu en tant que professeures. Mes **élèves *chercheurs*** se retrouvent donc à évaluer et à calculer la taille d'arbres ayant deux branches de la taille de l'arbre d'origine, puis quatre branches pour les groupes les plus rapides. A la demande, je leur fournis le matériel nécessaire : photocopies d'arbres de Pythagore et mètre enrouleur. Ils vérifient leurs résultats sur l'arbre en vraie grandeur dans la salle d'à côté. Plus tard dans l'année, les deux arbres (le petit et le grand) sont exploités pour l'utilisation des puissances. Le diaporama est visualisé en guise de synthèse. Il comprend des œuvres d'art comme : *La limite carrée* de Maurits Cornelis Escher [10] ; *Les fractales* de l'artiste graveur sur

[10] : *La limite carrée*, gravure sur bois de l'artiste graveur néerlandais Maurits Cornelis Escher[10], 340 mm × 340 mm, 1964 ; *La magie de M. C. Escher*, 2003, Taschen. Site internet officiel : http://www.mcescher.com/

cuivre Patrice Jeener[11], et des œuvres numériques plus récentes des artistes contemporains français d'art fractal : Miguel Chevalier[12], et de Jean-Claude Meynard[13].

Lors de l'année scolaire 2012-2013, l'activité est affinée de manière à privilégier davantage la démarche d'investigation. Seuls deux documents sont donnés aux élèves. La figure (cf. *Fig. 1, itération 2*) est faite par chaque élève. Le résultat attendu est un arbre de Pythagore (cf. *Fig. 2, itération 7*). A l'avenir, on peut envisager de ne donner qu'un document, celui de l'arbre.

III. DESCRIPTION DE L'ACTIVITE

1. *Objectifs*

Privilégier une **démarche d'investigation en mathématiques** pour :

- permettre à chaque élève de s'engager rapidement dans une recherche, mettre en commun ses réflexions, et se répartir le travail au sein d'un groupe, dans l'objectif de construire un arbre de Pythagore (ou plusieurs arbres assemblés) avec une classe (ou plusieurs classes)
- découvrir l'idée de fractale par la géométrie plane, et explorer des fractales générées par un logiciel spécifique.

2. *Connaissances et compétences en jeu*

Connaissances utilisées en mathématiques :

- géométrie dans le plan dont le vocabulaire et les propriétés de la géométrie plane, et des constructions géométriques de figures particulières telles que le carré, le triangle rectangle, le triangle rectangle isocèle, en utilisant ou non : la symétrie axiale, la médiatrice d'un segment, le cercle circonscrit au triangle rectangle, et les angles
- égalité de Pythagore dans le plan
- valeur exacte et valeur arrondie
- agrandissement et réduction : échelles, longueurs, aires
- éventuellement : encadrement, ordre et opérations
- calcul littéral et équations dont produit en croix
- puissances
- En 3ème : racines carrées, racine carrée de 2, algorithme
- Au lycée et après : suites, suites géométriques, sommes, transformations dans le plan, dimensions fractales, algorithme

Compétences :

- observer, rechercher, organiser les informations
- (modéliser), réaliser, manipuler, mesurer, calculer, conjecturer, démontrer
- communiquer à l'aide d'un langage adapté

Utiliser les TICE :

- pour découvrir l'univers de fractales avec *Tiera Zon*
- pour modéliser l'arbre avec un logiciel de géométrie dynamique comme *GeoGebra*

[11] : Jeener, P., 1986, *Espaces gravés*, Paris : Cedic/Nathan
[12] : Chevalier, M., http://www.miguel-chevalier.com/fr/index.html
[13] : Meynard, J-C., http://jeanclaudemeynard.com/

- pour programmer un algorithme avec un tableur comme celui de *GeoGebra* ou avec un logiciel pédagogique d'initiation à l'algorithmique comme *AlgoBox*

Histoire des arts : l'art fractal

3. *Niveaux conseillés*

4ème, niveaux également possibles : 3ème, lycée (et après) pour certaines notions précitées.

4. *Matériel nécessaire*

A prévoir par le professeur :

- feuilles (si possible de couleur) pour des pièces suivantes : blanc : 32 figures (16 feuilles A4), jaune : 16 figures (8 feuilles A4), orange clair : 8 figures (4 feuilles A4), orange plus foncé : 4 figures (4 feuilles format A4), rouge : 2 figures (1 feuille format raisin), marron foncé : 1 figure (1 feuille format raisin), noir 1 (papier kraft en rouleau par exemple) (uniquement si deux arbres ou plus sont faits : 1)
  ou simplement un rouleau de papier kraft blanc pour l'ensemble de l'arbre à colorier par les élèves
- photocopies de la fiche faite pour quatre élèves *Figure, itération 2* et des arbres au format A3 pour chaque élève (cf. *Fiches jointes en annexes*)
- mètre enrouleur, ruban adhésif, pâte à fixer
- un vidéoprojecteur pour projeter des images de fractales ou un diaporama, et les explorations fractales des élèves
- ordinateurs (dans l'idéal un par élève) avec les logiciels : *Tiera Zon*, *GeoGebra* et *AlgoBox*

A prévoir par les élèves : calculatrice, règle, compas, équerre, rapporteur, crayon à papier, gomme, ciseaux, et éventuellement crayons de couleur.

5. *Durée de l'activité*

En 4ème : 6 séances espacées dans l'année scolaire (30 min + 20 min + 1 s. + 2 s. + 1s. + 1 s.)

En 3ème : ajouter 1 séance pour les racines carrées dont celle de 2

Au lycée : ajouter le temps nécessaire pour l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique et d'algorithmique

6. *Déroulement de l'activité*

Par groupes

Phase 1
Sans avoir besoin de connaître l'égalité de Pythagore, chaque élève construit la *figure 1, itération 2*. Chaque groupe, de concert, communique ses différentes méthodes de construction à la classe. Les figures terminées (une figure par élève) sont conservées par le professeur.

Phase 2
Les élèves participent à un brainstorming animé par le professeur pour faire émerger les questions des élèves concernant la construction d'un arbre de Pythagore présenté au vidéo-projecteur.

Phase 3

Pour savoir où placer l'arbre, les élèves cherchent un ordre de grandeur pour conjecturer la réponse et calculent ses dimensions pour démontrer. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut être demandée par les élèves pour modéliser l'arbre. Le professeur conduit le temps d'échanges sur les différentes stratégies mises en œuvre. A la maison, les élèves terminent les calculs nécessitant l'égalité de Pythagore.

En 3ème, les résultats exacts peuvent être écrits sous la forme d'une expression comportant la racine carrée de 2.

L'étude algorithmique des dimensions et des aires de l'arbre aux *n* itérations peut être envisagée au lycée ou après.

Phase 4
Pour la construction de l'arbre, le professeur organise la classe avec les suggestions des élèves. Puis chaque groupe se répartit les tâches pour : calculer, construire, dénombrer, et assembler (avec du ruban adhésif seulement sur une face de l'arbre). Le professeur, médiateur, passe dans les groupes. En dehors de l'heure de cours, les élèves colorient éventuellement l'arbre. Aidés du professeur, ils le fixent au mur ou au plafond avec de la pâte à fixe en partant de sa base.

Phase 5
Le professeur fait découvrir la notion de fractale par la vidéo-projection d'images fractales ou d'un diaporama, et fait décortiquer aux élèves un chou romanesco (si c'est la saison). Le professeur met en évidence les liens vers l'art fractal. Plus tard, l'arbre est exploité dans les calculs de puissance de 2 pour dénombrer les carrés de même longueur de côté.

Phase 6
Le professeur fait la présentation technique du logiciel *Tiera Zon*, et les élèves l'utilisent pour générer des fractales et les explorer avec la fonction zoom et les variables de couleur.

Durant toutes les phases, l'enseignant a un rôle : de médiateur facilitant la communication, gérant les conflits et transférant un savoir ou une connaissance ; de formateur technique en mathématiques et si nécessaire en informatique ; de « stimulateur intellectuel ».

IV. SOLUTIONS DE L'ACTIVITE

1. *Description de la première figure (cf. Fig. 1, Itération 2)*

La figure est composée de quadrilatères et de triangles.
Or les quadrilatères ont tous leurs côtés de la même longueur et un angle droit, donc ce sont des carrés.
Puisque les triangles ont un angle droit et deux côtés de la même longueur, alors ce sont des triangles rectangles isocèles.
En conclusion, la figure est composée de sept carrés et de trois triangles rectangles isocèles.

2. *Construction de la première figure (cf. Fig. 1, Itération 2)*

Dans la figure, une seule longueur est indiquée, celle du côté du plus grand carré ACED.

- construire un carré de 5 cm de côté et le nommer ACED
- construire le triangle CEG rectangle isocèle en G. Il surplombe le plus grand carré et son hypoténuse est le côté du carré :

Méthode 1 : avec les angles

Dans un triangle rectangle isocèle, les angles à la base mesurant 45°, en utilisant le rapporteur, construire les angles $\widehat{ECG} = \widehat{GEC} = 45°$.

Méthode 2 : avec la médiatrice et un cercle
Un triangle rectangle isocèle est la moitié d'un carré dont les diagonales sont deux diamètres perpendiculaires du cercle circonscrit au carré.

- tracer le cercle de diamètre [CE]
- construire le diamètre du cercle perpendiculaire à [CE] (il appartient à la médiatrice de [CE])
- placer, à l'extérieur du carré, G le point d'intersection entre le cercle et ce diamètre.

3. *L'arbre (cf. Fig. 1, Itération 7) peut-il aller sous le tableau, ou à côté du tableau, ou ailleurs ?*

Avec un mètre enrouleur ou autre matériel (règle, ficelle), il s'agit de mesurer les hauteurs et les largeurs des espaces disponibles sous le tableau et à côté du tableau, ou ailleurs pour pouvoir placer l'arbre.

Pour donner un ordre de grandeur des dimensions de l'arbre et pour conjecturer une réponse, il y a plusieurs méthodes dont, entre autres, celle avec les échelles (agrandissement du format A4 vers la réalité en se basant sur la longueur 5 cm), et celle avec les encadrements.

Pour démontrer, il est nécessaire de calculer les mesures manquantes et celles indiquées sur la fiche proposée en document joint : $\sqrt{50}$ cm, 10 cm, $\sqrt{200}$ cm, 20 cm, $\sqrt{800}$ cm, etc. :

Données : dans le triangle CEG rectangle isocèle en G, on a CE = 5 cm. Or, d'après l'égalité de Pythagore, $CE^2 = CG^2 + GE^2$ avec CG = GE $5^2 = 2 \times CG^2$ $25 = 2 \times CG^2$ On obtient $CG^2 = \frac{25}{2}$ donc $CG = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm. Connaissant $c_2 = 5$ cm à l'itération 2, on a, à l'itération 1, $c_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm (valeur exacte).

Par la même méthode, on calcule MH = $\frac{5}{2}$ cm qui est la longueur du côté du premier carré $c_0 = \frac{5}{2}$ cm à l'itération 0.

On place le point D pour construire le triangle ADB rectangle isocèle en D. A l'itération 3, l'arbre est composé de l'arbre précédent et de son symétrique par rapport à la médiatrice de [AB] et du carré de côté AB. Données : dans le triangle rectangle isocèle en D, nommé ADB, AD = 5 cm Or, d'après l'égalité de Pythagore, $AB^2 = AD^2 + DB^2$ avec AD = DB $AB^2 = 2 \times AD^2$ $AB^2 = 2 \times 5^2$ $AB^2 = 50$ donc AB = $\sqrt{50}$ cm (valeur exacte). AB = $5\sqrt{2}$ cm. A l'itération 3, $c_3 = 5\sqrt{2}$ cm.

Par le même type de calcul, on obtiendra les longueurs indiquées sur la fiche : c_4, c_5, c_6, c_7 aux itérations respectivement d'ordres 4, 5, 6 et 7 ci-après. Un tableur peut être utilisé.
$2 \times \sqrt{50}^2 = 2 \times 50 = 100$ puis $c_4 = \sqrt{100} = 10$ cm,
$2 \times 10^2 = 2 \times 100 = 200$ puis $c_5 = \sqrt{200}$ cm $= 10\sqrt{2}$ cm,
$2 \times \sqrt{200}^2 = 2 \times 200 = 400$ puis $c_6 = \sqrt{400} = 20$ cm,
$2 \times 20^2 = 2 \times 400 = 800$ puis $c_7 = \sqrt{800}$ cm $= 20\sqrt{2}$ cm. Et ainsi de suite.

En effectuant une sorte de quadrillage comme ci-après (cf. *Fig. 6*), en utilisant la propriété de conservation des longueurs par symétrie et en identifiant les longueurs égales, on trouve les dimensions de l'arbre (hauteur et largeur) à l'itération 7 : $h_7 = 75\sqrt{2}$ cm donc $h_7 \leq 106{,}1$ cm, et $l_7 = 110\sqrt{2}$ cm donc $l_7 \leq 155{,}6$ cm. Ce qui permet de conclure quant à la position de l'arbre dans la classe. Il existe d'autres façons de faire le découpage de l'arbre. Bien souvent, les élèves font un quadrillage complet de l'arbre.

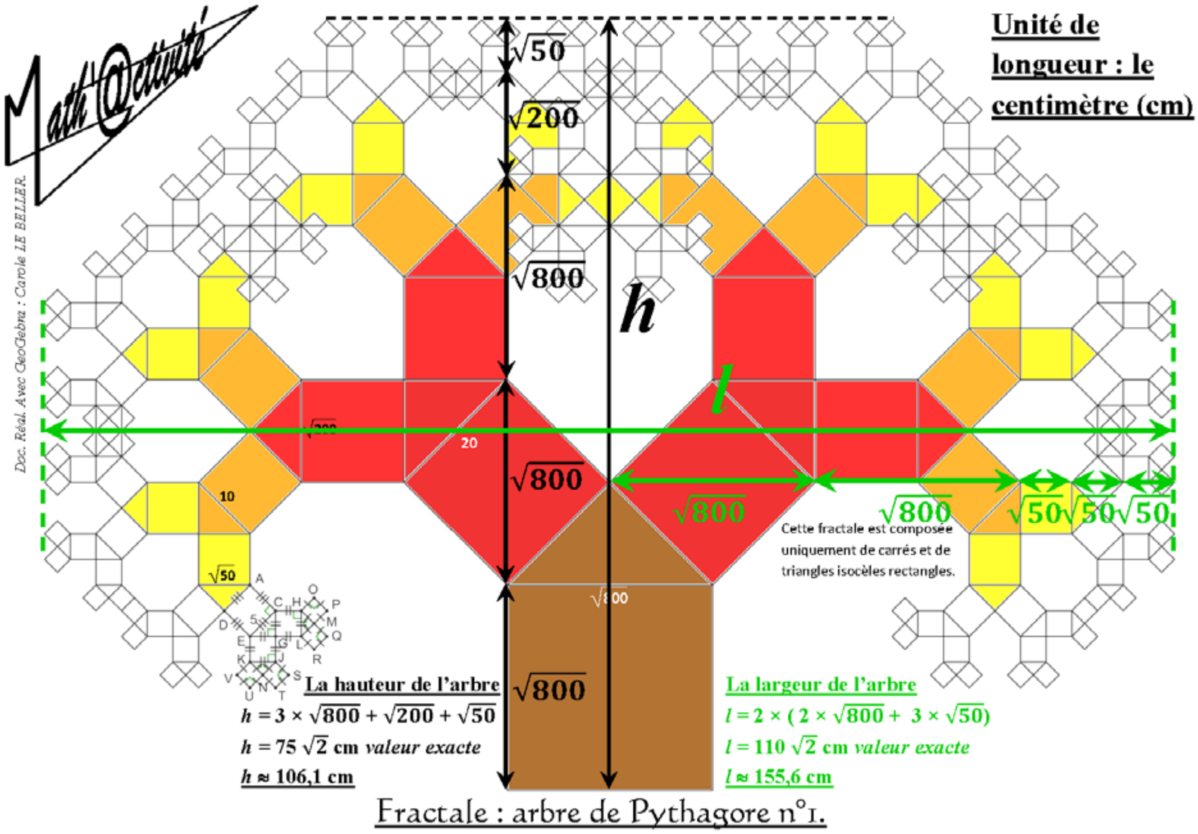


Fig. 6 - *Recherche des dimensions de l'arbre de Pythagore à l'itération 7 (cf. Fig.4)*

Par des procédés analogues, les dimensions des arbres aux itérations 8 et 9 sont calculées.
A l'itération 8, on obtient $h_8 = 152{,}5$ cm et $l_8 = 225$ cm.
A l'itération 9, on obtient $h_9 = 155\sqrt{2}$ cm donc $h_9 \leq 219{,}3$ cm et $l_9 = 230\sqrt{2}$ cm donc $l_9 \leq 325{,}3$ cm.

4. *Compléments algorithmiques : dimensions de l'arbre, nombres de carrés de même longueur de côté, et nombre total de carrés semblables à la n-ième itération*

Ci-après, dans les tableaux, sont précisées les dimensions (largeurs et hauteurs) des arbres étudiées à l'ordre n (c'est-à-dire à la n-ième itération) avec $n \in \mathbb{N}$, ainsi que les nombres de carrés d'une même longueur de côté, et le nombre total de carrés de même longueur de côté.

Selon si n est pair ou impair, les expressions en fonction de n des hauteurs et des largeurs seront différentes.

Ordre n	Longueur du côté du plus grand carré c_n en cm	Longueur de la diagonale du plus grand carré d_n en cm	Largeur de l'arbre l_n en cm
0	$c_0 = \frac{5}{2}$	$d_0 = c_1$ $d_0 = \frac{5}{2}\sqrt{2}$	$l_0 = c_0$ $l_0 = \frac{5}{2}$
1	$c_1 = c_0\sqrt{2}^1$ $c_1 = \frac{5}{2}\sqrt{2}$	$d_1 = c_2$ $d_1 = 5$	$l_1 = 2c_1$ $l_1 = 2c_0\sqrt{2}^1$ $l_1 = 2c_0\sqrt{2}$ $l_1 = 5\sqrt{2}$
2	$c_2 = c_1\sqrt{2}$ $c_2 = c_0\sqrt{2}^2$ $c_2 = 5$	$d_2 = c_3$ $d_2 = 5\sqrt{2}$	$l_2 = 2(c_0 + c_2)$ $l_2 = 2c_0\left(1 + \sqrt{2}^2\right)$ $l_2 = 15$
3	$c_3 = c_2\sqrt{2}$ $c_3 = c_0\sqrt{2}^3$ $c_3 = 5\sqrt{2}$	$d_3 = c_4$ $d_3 = 10$	$l_3 = 2(2c_1 + c_3)$ $l_3 = 2c_0\left(2\sqrt{2}^1 + \sqrt{2}^3\right)$ $l_3 = 8c_0\sqrt{2}$ $l_3 = 20\sqrt{2}$
4	$c_4 = c_3\sqrt{2}$ $c_4 = c_0\sqrt{2}^4$ $c_4 = 10$	$d_4 = c_5$ $d_4 = 10\sqrt{2}$	$l_4 = 2(c_0 + 2c_2 + c_4)$ $l_4 = 2c_0\left(1 + 2\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^4\right)$ $l_4 = 45$
5	$c_5 = c_4\sqrt{2}$ $c_5 = c_0\sqrt{2}^5$ $c_5 = 10\sqrt{2}$	$d_5 = c_6$ $d_5 = 20$	$l_5 = 2(2c_1 + 2c_3 + c_5)$ $l_5 = 2c_0\left(2\sqrt{2}^1 + 2\sqrt{2}^3 + \sqrt{2}^5\right)$ $l_5 = 20c_0\sqrt{2}$ $l_5 = 50\sqrt{2}$
6	$c_6 = c_5\sqrt{2}$ $c_6 = c_0\sqrt{2}^3$ $c_6 = 20$	$d_6 = c_7$ $d_6 = 20\sqrt{2}$	$l_6 = 2(c_0 + 2c_2 + 2c_4 + c_6)$ $l_6 = 2c_0\left(1 + 2\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}^4 + \sqrt{2}^6\right)$ $l_6 = 105$
7	$c_7 = c_6\sqrt{2}$ $c_7 = c_0\sqrt{2}^6$ $c_7 = 20\sqrt{2}$	$d_7 = c_8$ $d_7 = 40$	$l_7 = 2(2c_1 + 2c_3 + 2c_5 + c_7)$ $l_7 = 2c_0\left(2\sqrt{2}^1 + 2\sqrt{2}^3 + 2\sqrt{2}^5 + \sqrt{2}^7\right)$ $l_7 = 44c_0\sqrt{2}$ $l_7 = 110\sqrt{2}$
8	$c_8 = c_7\sqrt{2}$ $c_8 = c_0\sqrt{2}^7$ $c_8 = 40$	$d_8 = c_9$ $d_8 = 40\sqrt{2}$	$l_8 = 2(c_0 + 2c_2 + 2c_4 + 2c_6 + c_8)$ $l_8 = 2c_0\left(1 + 2\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}^4 + 2\sqrt{2}^6 + \sqrt{2}^8\right)$ $l_8 = 225$
9	$c_9 = c_8\sqrt{2}$ $c_9 = c_0\sqrt{2}^8$ $c_9 = 40\sqrt{2}$	$d_9 = c_{10}$ $d_9 = 80$	$l_9 = 2(2c_1 + 2c_3 + 2c_5 + 2c_7 + c_9)$ $l_9 = 2c_0\left(2\sqrt{2}^1 + 2\sqrt{2}^3 + 2\sqrt{2}^5 + 2\sqrt{2}^7 + \sqrt{2}^9\right)$ $l_9 = 92c_0\sqrt{2}$ $l_9 = 230\sqrt{2}$
…	…	…	…

<table>
<tr><td>n pair</td><td rowspan="2">$c_{n+1} = \sqrt{2}c_n$
$c_n = c_0\sqrt{2}^{n}$
(c_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} > 1$ donc (c_n) diverge.</td><td rowspan="2">$d_n = c_{n+1}$
$d_n = c_0\sqrt{2}^{n+1}$</td><td>$\{n \in \mathbb{N} \mid n\ pair\} et\ p = \frac{n}{2}$
$l_n = 2(2\sum_{i=0}^{p} c_{2i} - c_n - c_0)$
$l_n = 2c_0\left(2\sum_{i=0}^{p} 2^i - 2^p - 1\right)$</td></tr>
<tr><td>n impair</td><td>$\{n \in \mathbb{N}^* \mid n\ impair\} et\ p = \frac{n-1}{2}$
$l_n = 2(2\sum_{i=0}^{p} c_{2i+1} - c_n)$
$l_n = 2c_0\left(2\sum_{i=0}^{p} \sqrt{2}^{2i+1} - \sqrt{2}^{n}\right)$
$l_n = 2\sqrt{2}c_0\left(2\sum_{i=0}^{p} 2^i - 2^p\right)$</td></tr>
</table>

Ordre n	Longueur du côté du plus grand carré c_n en cm	hauteur de l'arbre h_n en cm	Nombre de carrés N_{c_p} de côté c_p
0	$c_0 = \frac{5}{2}$	$h_0 = c_0$ $h_0 = \frac{5}{2}$	$N_{c_0} = 2^0 = 1$
1	$c_1 = c_0\sqrt{2}^{1}$ $c_1 = \frac{5}{2}\sqrt{2}$	$h_1 = 2c_1$ $h_1 = 2c_0\sqrt{2}^{1}$ $h_1 = 2c_0\sqrt{2}$ $h_1 = 5\sqrt{2}$	$N_{c_0} = 2^1 = 2$ $N_{c_1} = 2^0 = 1$
2	$c_2 = c_1\sqrt{2}$ $c_2 = c_0\sqrt{2}^{2}$ $c_2 = 5$	$h_2 = c_0 + 2c_2$ $h_2 = c_0\left(1 + 2\sqrt{2}^{2}\right)$ $h_2 = 5c_0$ $h_2 = \frac{25}{2}$	$N_{c_0} = 2^2 = 4$ $N_{c_1} = 2^1 = 2$ $N_{c_2} = 2^0 = 1$
3	$c_3 = c_2\sqrt{2}$ $c_3 = c_0\sqrt{2}^{3}$ $c_3 = 5\sqrt{2}$	$h_3 = 2(c_1 + c_3)$ $h_3 = 2c_0\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2}^{2}\right)$ $h_3 = 6c_0\sqrt{2}$ $h_3 = 15\sqrt{2}$	$N_{c_0} = 2^3 = 8$ $N_{c_1} = 2^2 = 4$ $N_{c_2} = 2^1 = 2$ $N_{c_3} = 2^0 = 1$
4	$c_4 = c_3\sqrt{2}$ $c_4 = c_0\sqrt{2}^{4}$ $c_4 = 10$	$h_4 = c_0 + 2c_2 + 2c_4$ $h_4 = c_0\left(1 + 2\sqrt{2}^{2} + 2\sqrt{2}^{4}\right)$ $h_4 = 13c_0$ $h_4 = \frac{65}{2}$	$N_{c_0} = 2^4 = 16$ $N_{c_1} = 2^3 = 8$ $N_{c_2} = 2^2 = 4$ $N_{c_3} = 2^1 = 2$ $N_{c_4} = 2^0 = 1$
5	$c_5 = c_4\sqrt{2}$ $c_5 = c_0\sqrt{2}^{5}$ $c_5 = 10\sqrt{2}$	$h_5 = 2(c_1 + c_3 + c_5)$ $h_5 = 2c_0\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2}^{2} + \sqrt{2}^{4}\right)$ $h_5 = 14c_0\sqrt{2}$ $h_5 = 35\sqrt{2}$	$N_{c_0} = 2^5 = 32$ $N_{c_1} = 2^4 = 16$ $N_{c_2} = 2^3 = 8$ $N_{c_3} = 2^2 = 4$ $N_{c_4} = 2^1 = 2$ $N_{c_5} = 2^0 = 1$
6	$c_6 = c_5\sqrt{2}$ $c_6 = c_0\sqrt{2}^{3}$	$h_6 = c_0 + 2c_2 + 2c_4 + 2c_6$ $h_6 = c_0\left(1 + 2\sqrt{2}^{2} + 2\sqrt{2}^{4} + 2\sqrt{2}^{6}\right)$	$N_{c_0} = 2^6 = 64$ $N_{c_1} = 2^5 = 32$

	$c_6 = 20$	$h_6 = 29c_0$ $h_6 = \dfrac{145}{2}$	$N_{c_2} = 2^4 = 16$ $N_{c_3} = 2^3 = 8$ $N_{c_4} = 2^2 = 4$ $N_{c_5} = 2^1 = 2$ $N_{c_6} = 2^0 = 1$
7	$c_7 = c_6\sqrt{2}$ $c_7 = c_0\sqrt{2}^6$ $c_7 = 20\sqrt{2}$	$h_7 = 2(c_1 + c_3 + c_5 + c_7)$ $h_7 = 2c_0\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^4 + \sqrt{2}^6\right)$ $h_7 = 30c_0\sqrt{2}$ $h_7 = 75\sqrt{2}$	$N_{c_0} = 2^7 = 128$ $N_{c_1} = 2^6 = 64$ $N_{c_2} = 2^5 = 32$ $N_{c_3} = 2^4 = 16$ $N_{c_4} = 2^3 = 8$ $N_{c_5} = 2^2 = 4$ $N_{c_6} = 2^1 = 2$ $N_{c_7} = 2^0 = 1$
8	$c_8 = c_7\sqrt{2}$ $c_8 = c_0\sqrt{2}^7$ $c_8 = 40$	$h_8 = c_0 + 2c_2 + 2c_4 + 2c_6 + 2c_8$ $h_8 = c_0\left(1 + 2\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}^4 + 2\sqrt{2}^6 + 2\sqrt{2}^8\right)$ $h_8 = 61c_0$ $h_8 = \dfrac{305}{2}$	$N_{c_0} = 2^8 = 256$ $N_{c_1} = 2^7 = 128$ $N_{c_2} = 2^6 = 64$ $N_{c_3} = 2^5 = 32$ $N_{c_4} = 2^4 = 16$ $N_{c_5} = 2^3 = 8$ $N_{c_6} = 2^2 = 4$ $N_{c_7} = 2^1 = 2$ $N_{c_8} = 2^0 = 1$
9	$c_9 = c_8\sqrt{2}$ $c_9 = c_0\sqrt{2}^8$ $c_9 = 40\sqrt{2}$	$h_9 = 2(c_1 + c_3 + c_5 + c_7 + c_9)$ $h_9 = 2c_0\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^4 + \sqrt{2}^6 + \sqrt{2}^8\right)$ $h_9 = 62c_0\sqrt{2}$ $h_9 = 155\sqrt{2}$	$N_{c_0} = 2^9 = 512$ $N_{c_1} = 2^8 = 256$ $N_{c_2} = 2^7 = 128$ $N_{c_3} = 2^6 = 64$ $N_{c_4} = 2^5 = 32$ $N_{c_5} = 2^4 = 16$ $N_{c_6} = 2^3 = 8$ $N_{c_7} = 2^2 = 4$ $N_{c_8} = 2^1 = 2$ $N_{c_9} = 2^0 = 1$
…	…	…	…
n pair	$c_{n+1} = \sqrt{2}c_n$ $c_n = c_0\sqrt{2}^n$ (c_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} > 1$ donc (c_n) diverge.	$\{n \in \mathbb{N} \mid n\ pair\} et\ p = \dfrac{n}{2}$ $h_n = c_0\left(2\sum_{i=0}^{p} 2^i - 1\right)$	$N_{c_0} = 2^n$ $N_{c_1} = 2^{n-1}$ $N_{c_2} = 2^{n-2}$ … $N_{c_n} = 2^0 = 1$
n impair		$\{n \in \mathbb{N}^* \mid n\ impair\} et\ p = \dfrac{n-1}{2}$ $h_n = 2\sqrt{2}c_0\sum_{i=0}^{p} 2^i$	

***Fig. 7** - Tableaux des dimensions de l'arbre et du nombre de carrés de même longueur de côté à l'ordre n (ou n-ième itération)*

Avec ALGOBOX[14] : UN ARBRE DE PYTHAGORE QUI POUSSE COMME UN CHEVEU - dimensions et nombres

Pour le bon fonctionnement de l'algorithme simple ci-après, il s'agit d'entrer *c* un nombre strictement supérieur à 0, et *n* un nombre entier compris entre 1 et 194 inclus. Dans une logique de construction en papier, la valeur initiale (itération 0) de *c*, correspondant à la longueur du côté du plus petit carré, est petite (exemple testé ci-après en cm, c = 2,5).

CODE DE L'ALGORITHME :

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  l EST_DU_TYPE NOMBRE
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
  nbre EST_DU_TYPE NOMBRE
  somme EST_DU_TYPE NOMBRE
  j EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  nbre_fig1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  Snbre EST_DU_TYPE NOMBRE
  Snbre_total EST_DU_TYPE NOMBRE
  Nbre_arbre_it7 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "La longueur du côté du carré (en cm) à l'itération 0 est c."
  AFFICHER "Pour info, dans l'arbre de Pythagore fractale 1 de Math'@ctivité, c = 5/2."
  LIRE c
  u PREND_LA_VALEUR c
  AFFICHER "Itération 0, longueur du côté c = "
  AFFICHER u
  AFFICHER " cm."
  AFFICHER "Calculs jusqu'à la n-ième itération, avec n un nombre entier compris entre 1 et 194."
  LIRE n
  AFFICHER "Les nombres étant composés d'au maximum 8 chiffres, les résultats ci-dessous sont généralement arrondis."
  i PREND_LA_VALEUR n
  SI (n>=2) ALORS
    DEBUT_SI
    nbre_fig1 PREND_LA_VALEUR pow(2,n-2)
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      nbre_fig1 PREND_LA_VALEUR 0
      FIN_SINON
  SI (n>=7) ALORS
    DEBUT_SI
    Nbre_arbre_it7 PREND_LA_VALEUR pow(2,n-7)
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      Nbre_arbre_it7 PREND_LA_VALEUR 0
      FIN_SINON
  Snbre PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR sqrt(2)*u
    AFFICHER "A l'itération "
    AFFICHER i
    AFFICHER " , la longueur du côté du plus grand carré est "
    AFFICHER u
    AFFICHER " cm."
    somme PREND_LA_VALEUR 0
    Snbre PREND_LA_VALEUR Snbre+pow(2,i)
    Snbre_total PREND_LA_VALEUR Snbre+1
    SI (n%2==0) ALORS
      DEBUT_SI
      p PREND_LA_VALEUR n/2
      POUR j ALLANT_DE 0 A p
        DEBUT_POUR
        somme PREND_LA_VALEUR somme+pow(2,j)
```

[14] : *AlgoBox* est un logiciel pédagogique d'initiation à l'algorithmique.

```
          FIN_POUR
        l PREND_LA_VALEUR 2*c*((2*somme)-pow(2,p)-1)
        h PREND_LA_VALEUR c*((2*somme)+1)-2*c
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          p PREND_LA_VALEUR (n-1)/2
          POUR k ALLANT_DE 0 A p
            DEBUT_POUR
            somme PREND_LA_VALEUR somme+pow(2,k)
            FIN_POUR
          l PREND_LA_VALEUR 2*sqrt(2)*c*((2*somme)-pow(2,p))
          h PREND_LA_VALEUR 2*sqrt(2)*c*somme
          FIN_SINON
      FIN_POUR
    AFFICHER "La largeur de l'arbre à la "
    AFFICHER n
    AFFICHER "-ième itération est "
    AFFICHER l
    AFFICHER " cm."
    AFFICHER "Sa hauteur est "
    AFFICHER h
    AFFICHER " cm."
    AFFICHER "Le nombre de figures 1 d'itération 2 à construire est "
    AFFICHER nbre_fig1
    AFFICHER "."
    AFFICHER "Le nombre total de carrés semblables est "
    AFFICHER Snbre_total
    AFFICHER "."
    AFFICHER "Cet arbre est composé de "
    AFFICHER Nbre_arbre_it7
    AFFICHER " arbre(s) identique(s) à celui de l'itération 7 (assemblés avec d'autres carrés)."
    AFFICHER "Réal. Carole LE BELLER"
  FIN_ALGORITHME
```

RÉSULTATS :

```
***Algorithme lancé***
La longueur du côté du carré (en cm) à l'itération 0 est c.
Pour info, dans l'arbre de Pythagore fractale 1 de Math'@ctivité, c = 5/2.
Entrer c : 5/2
Itération 0, longueur du côté c = 2.5 cm.
Calculs jusqu'à la n-ième itération, avec n un nombre entier compris entre 1 et 194.
Entrer n : 10
Les nombres étant composés d'au maximum 8 chiffres, les résultats ci-dessous sont généralement arrondis.
A l'itération 1 , la longueur du côté du plus grand carré est 3.5355339 cm.
A l'itération 2 , la longueur du côté du plus grand carré est 5 cm.
A l'itération 3 , la longueur du côté du plus grand carré est 7.0710678 cm.
A l'itération 4 , la longueur du côté du plus grand carré est 10 cm.
A l'itération 5 , la longueur du côté du plus grand carré est 14.142136 cm.
A l'itération 6 , la longueur du côté du plus grand carré est 20 cm.
A l'itération 7 , la longueur du côté du plus grand carré est 28.284271 cm.
A l'itération 8 , la longueur du côté du plus grand carré est 40 cm.
A l'itération 9 , la longueur du côté du plus grand carré est 56.568542 cm.
A l'itération 10 , la longueur du côté du plus grand carré est 80 cm.
La largeur de l'arbre à la 10-ième itération est 465 cm.
Sa hauteur est 312.5 cm.
Le nombre de figures 1 d'itération 2 à construire est 256.
Le nombre total de carrés semblables est 2047.
Cet arbre est composé de 8 arbre(s) identique(s) à celui de l'itération 7 (assemblés avec d'autres carrés).
Réal. Carole LE BELLER
***Algorithme terminé***
```

Fig. 8 - *Algorithme et résultats à la 10-ième itération générés avec AlgoBox* [15]

L'arbre de l'itération 10 est celui qui a failli être réalisé en 2011 au collège Les Ormeaux de Rennes. Après vérification des calculs en utilisant les tableaux précédents et le logiciel *AlgoBox*, le plafond de la salle étant à une hauteur du sol de 3 mètres, il manque 12,5 cm pour positionner l'arbre de 312,5 cm de hauteur.

[15] : Possibilité d'utiliser en ligne cet algorithme à partir du Site internet *Math'@ctivité* : http://mathactivite.free.fr/menus/01p02-fractale-arbre-pythagore-1.php (en bas de la page web)

Réalisation par les élèves de 4ème A du collège public Les Ormeaux – Rennes, 2012 -2013

***Fig. 9** - Un arbre de Pythagore de la même taille que celui de la figure 4 (itération 7)*

Construire l'arbre à partir de sa base (le plus grand carré) comme le suggère Francis Casiro peut aussi être réalisé (cf. I.1). La longueur du côté à la n-ième itération est aussi une suite géométrique. Par contre, sa raison étant $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, elle est convergente. Cette autre démarche conduit aux mêmes résultats si la longueur du carré de départ est l'une de celles citées précédemment. Ses algorithmes peuvent avoir un intérêt différent et *a priori* plus intéressant pour l'étude des aires lors du chevauchement des carrés.

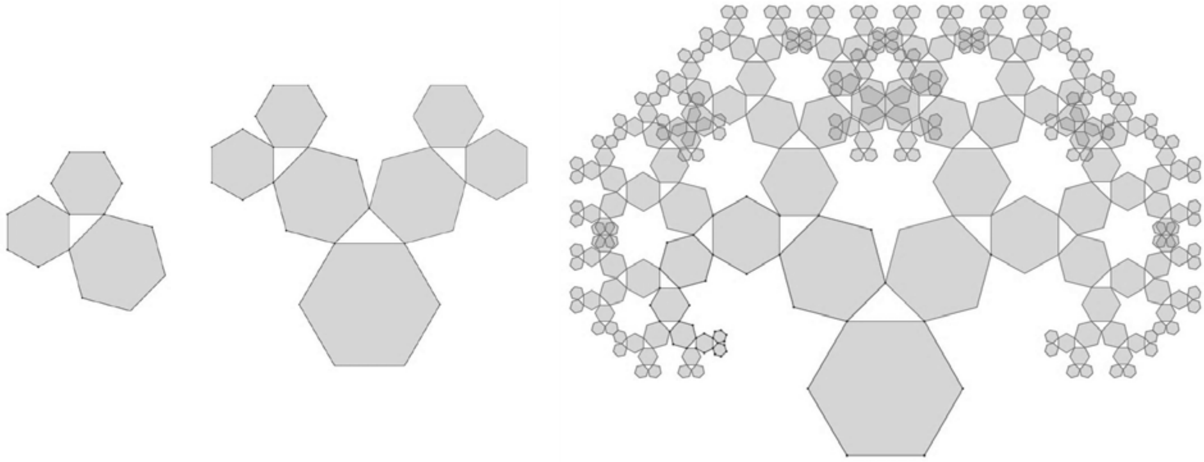
V. BILAN DE L'ACTIVITE ET AVENIR DE L'ACTIVITE

La construction géométrique de l'arbre demande de la précision au risque de voir l'arbre de travers. Pour toutes les classes ayant construit un arbre de Pythagore, les élèves sont **fiers de leur travail collectif** et souhaitent montrer leur arbre aux autres classes. Cette année, il a fait des émules dans une classe de $5^{\text{ème}}$ qui s'en est inspirée pour son scénario de théâtre scientifique.

Au fil des années, la conduite de l'activité s'est vue modifiée pour être de moins en moins guidée. Il n'y a plus de fiches avec des questions posées par le professeur. Le démarrage de l'activité s'effectue à partir des questions des élèves. Les élèves, plus **impliqués**, sont davantage **en situation de recherche**. Ils ont **diverses stratégies** pour **conjecturer** les dimensions de l'arbre puis les **démontrer** en calculant. Ils effectuent facilement les calculs pour les constructions des carrés et des triangles rectangles isocèles, en se rendant compte de l'importance des valeurs exactes. Christophe Pépino, professeur de mathématiques au Collège Jean Macé à Saint Brieuc, a aussi privilégié la **démarche d'investigation** lors de sa conduite de l'activité avec deux de ses classes de $4^{\text{ème}}$ cette année (cf. *Bilan et photographies sur le site de l'IREM de Rennes*).

La phase 5 du déroulement est un plus pour les élèves. Elle contribue à la constitution de leur bagage culturel mathématique et aussi artistique. Elle peut être aussi reprise en $3^{\text{ème}}$ pour l'épreuve de l'histoire des arts au brevet des collèges. Le caractère ludique de la phase 6 du déroulement, prolongement à l'activité, et ses résultats ajoutent une sorte d'**émerveillement mathématique** et révèle aux élèves que les mathématiques sont belles. Cette année, je n'ai pas fait les phases 5 et 6 avec ma classe de $4^{\text{ème}}$ puisque j'avais un autre projet à lui faire vivre. Avec le recul, et en comparaison avec les autres années, je trouve que c'est un manque.

Pour aider à mieux comprendre l'égalité de Pythagore et pour ne pas en oublier le sens concernant les aires, le professeur peut suggérer aux élèves de mettre les triangles rectangles isocèles d'une même couleur ou en blanc ou en transparent. Il en émergera peut-être l'intéressante question du calcul de la somme des aires des figures semblables autres que les triangles rectangles isocèles sans tenir compte des chevauchements (réponse : $(n + 1) \times$ aire de la plus grande figure, avec *n* le nombre d'itérations). Par ailleurs, donner la possibilité aux élèves de construire un autre arbre de Pythagore avec, à la place des carrés, d'autres formes semblables construites sur les trois côtés des triangles rectangles peut être envisagé. Cette activité peut permettre d'accentuer la **curiosité** et la **créativité** des élèves.



Itération 1 *Itération 2* *Itération 7*

Fig. 10 - *Arbres de Pythagore composés de triangles rectangles isocèles et d'hexagones réguliers construits avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra*

En aide à la construction de l'arbre en vraie grandeur en papier ou à défaut de celle-ci, les élèvent peuvent **modéliser** un arbre de Pythagore à l'ordinateur avec un logiciel de géométrie dynamique tel que *GeoGebra*. Avant de le faire, le professeur doit vérifier la faisabilité qui est fonction de la puissance des ordinateurs de l'établissement. Le professeur peut aussi faire découvrir, voire faire construire, un arbre composé de triangles rectangles autres qu'isocèles. L'asymétrie de ce type d'arbre demande de le construire plutôt par la base.

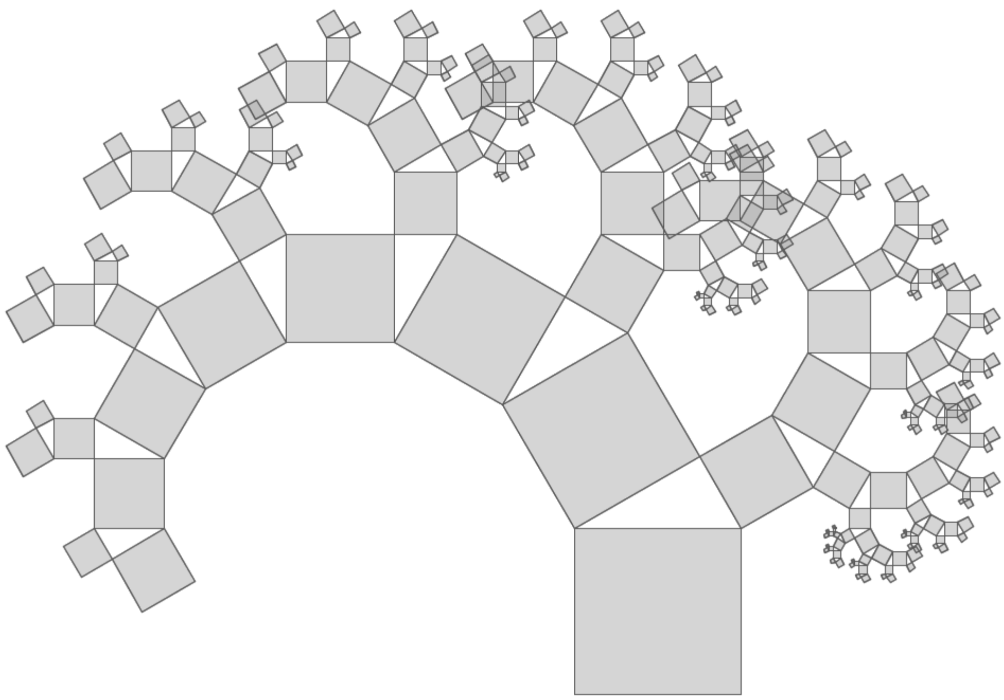


Fig. 11 - *Arbre de Pythagore composé de triangles rectangles et de carrés construit avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra à l'itération 7*

Un travail sur les racines carrées dont la racine carrée de 2 et sur l'algorithmique peut être envisagé dès la 3ème. Au lycée, une étude algorithmique intéressante portant sur les dimensions et les aires des arbres à *n* itérations peut être conduite en utilisant les suites, les suites géométriques, les sommes, les transformations, et ce qui en découle. L'utilisation du tableur ou d'un logiciel d'algorithmique est alors conseillée.

VI. CONCLUSION

Cette activité plaisante pour les élèves, conduite en privilégiant la démarche d'investigation permet de mettre les élèves rapidement en activité et en situation de recherche. Chaque élève peut y trouver sa place. Personne n'est laissé de côté. Elle permet aussi d'étoffer la culture mathématique et artistique des élèves de manière ludique tout en conservant une rigueur mathématique de construction et de calcul. Dans son ensemble, l'activité permet à l'élève d'être acteur, chercheur, co-auteur, voire auteur.

ELEMENTS BIBLIOGRAPHIQUES ET SITES INTERNET

Collectif, *Les fractales – Art, Nature et Modélisation*, 2004, HS n°18, Bibliothèque Tangente, Paris : Éditions POLE.

CHEVALIER, M., art fractal. Site internet : http://www.miguel-chevalier.com/fr/index.html.

DELEDICQ, A., CASIRO, F., 1998, *Pythagore & Thalès*, ACL – Éditions du Kangourou.

EVEILLEAU, T., *Fractales de Pythagore*. Site internet : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/indexF.htm

ESCHER, M.C., 1961, *La limite carrée*, 340 mm × 340 mm, 1964, *La magie de M. C. Escher*, 2003, Taschen. Site internet officiel : http://www.mcescher.com/.

GRODOWSKI, S., GUEUDET, G., LE BELLER, C., LEBAUD, M.-P., PEPINO, C., ROUAULT, Y. (2012). Démarches d'investigation en mathématiques au collège, In Aldon et al. Représentations dynamiques des mathématiques : quels outils pour faire, pour apprendre et pour enseigner les mathématiques ? Actes des journées Ifé 2012, http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/representation-dynamiques-des-mathematiques.

JEENER, P., 1986, *Espaces gravés*, Paris : Cedic/Nathan.

LE BELLER, C., *Fractale Arbre de Pythagore 1*, Fiches, modèles, fichiers dynamiques *GeoGebra* et *AlgoBox* sur le Site internet *Math'@ctivité*, http://mathactivite.free.fr/menus/01p02-fractale-arbre-pythagore-1.php.

MEYNARD, J-C., art fractal. Site internet : http://jeanclaudemeynard.com/.

STEPHEN C. Ferguson, 1998, logiciel *Tiera Zon*. Site internet : http://1998.tierazon.com/Tierazon/Tierazon.html.

ANNEXES ET FICHIERS DYNAMIQUES EN LIGNE

Site de l'IREM de Rennes :
http://www.irem.univ-rennes1.fr/recherches/groupes/groupe_DI/index.htm

Site Math'@ctivité (en bas de la page web) :
http://mathactivite.free.fr/menus/01p02-fractale-arbre-pythagore-1.php

Annexe 1 - Figures, itération 2 pour 4 élèves

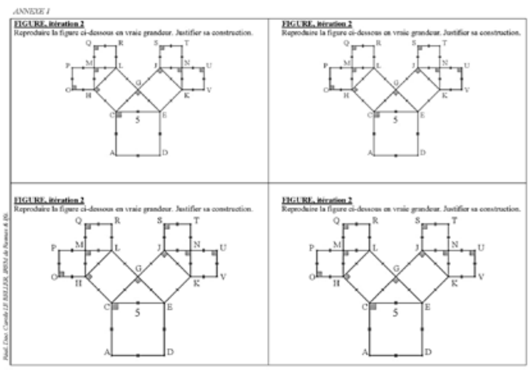
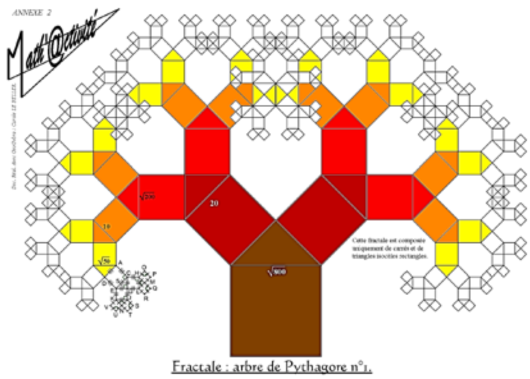
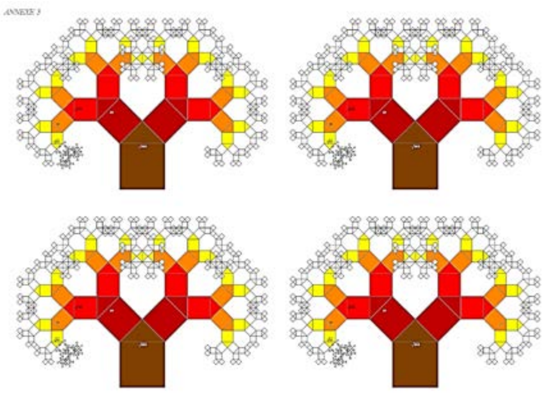
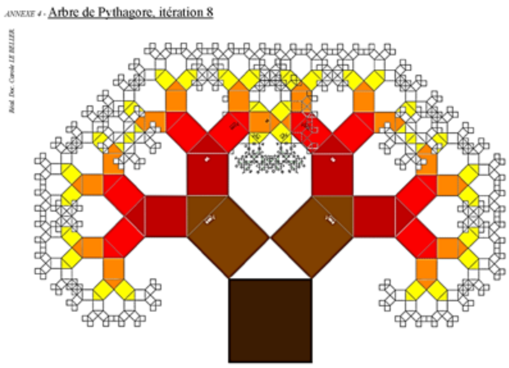
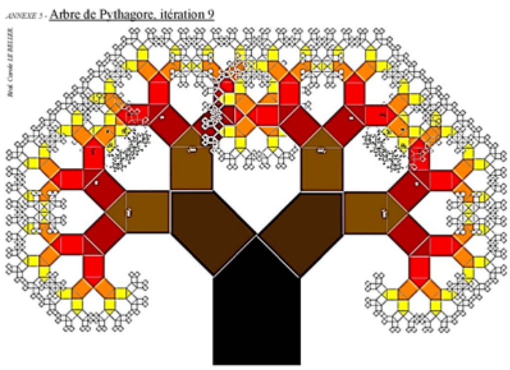
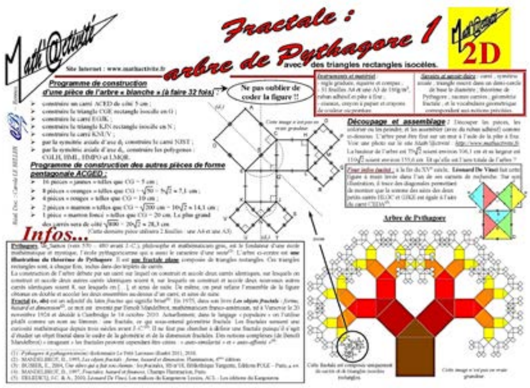
Annexe 2 - Arbre de Pythagore, itération 7

Annexe 3 - Quatre arbres de Pythagore (itération 7)

Annexe 4 - Arbre de Pythagore, itération 8

Annexe 5 - Arbre de Pythagore, itération 9

Annexe 6 - Fiche *Fractale – Arbre de Pythagore 1, Math'@ctivité 2D*

 *Annexe 1* - Figures, itération 2 pour 4 élèves	 *Annexe 2* - Arbre de Pythagore, itération 7
 *Annexe 3* - Quatre arbres de Pythagore (itération 7)	 *Annexe 4* - Arbre de Pythagore, itération 8
 *Annexe 5* - Arbre de Pythagore, itération 9	 *Annexe 6* - Fiche *Fractale – Arbre de Pythagore 1, Math'@ctivité 2D*