Feuille n° 4 : dénombrement, ensembles finis

Exercice 1

1. Au mois de janvier, Anatole a pris ses repas de midi au Restau U. Il y a mangé 17 fois du poisson et 25 fois des légumes. Montrer qu'il a mangé du poisson et des légumes au cours d'un des repas.
2. Dans une classe de 35 élèves, chaque étudiant doit apprendre au moins une des deux langues, anglais ou allemand. 25 étudient l'anglais et 20 apprennent les deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand ?
3. Hier soir, sur 100 français, 95 ont regardé le journal télévisé, 85 ont regardé le film qui suivait et 70 se sont couchés de bonne heure. Combien de français (au moins) se sont couchés tôt après avoir regardé le journal et le film ?

Exercice 2

1. Montrer que, dans un ensemble de cardinal 10, deux sous-ensembles de cardinal 7 ont une intersection non vide.
2. Montrer que, dans un ensemble de cardinal 10, trois sous-ensembles de cardinal 7 ont une intersection non vide.
3. Dessiner (si possible) deux ensembles A et B avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments.
4. Dessiner (si possible) trois ensembles A, B et C avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments et l'intersection $A \cap B \cap C$ aucun.

Exercice 3

1. De combien de façons distinctes peut-on diviser une classe de 8 élèves en deux groupes de 4 élèves chacun ?
2. Un ensemble fini S a 364 sous-ensembles de 3 éléments. Quel est le nombre d'éléments de S ?

Exercice 4

On considère deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$.

1. Montrer que les sous-ensembles $f^{-1}(\{b\})$ forment une partition de A quand b parcourt B.
   Soit n un entier naturel non nul. On suppose que A est un ensemble fini.
2. On suppose que chaque élément de B a exactement n antécédents. Montrer que B est de cardinal fini et déterminer le cardinal de A en fonction de celui de B.
3. On suppose que chaque élément de B a exactement n antécédents sauf l'élément β qui n'a que deux antécédents. Déterminer le cardinal de A.
4. Donner l'exemple d'une application $f : A \to B$ où B est un ensemble fini sans que A le soit.

Exercice 5

1. Démontrer la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ pour $n > p \geq 1$ en utilisant la formule qui calcule $\binom{n}{p}$ à l'aide de factorielles.
2. Inversement, à l'aide de cette identité, démontrer par récurrence la formule qui calcule $\binom{n}{p}$.

Exercice 6

Écrire le triangle de Pascal jusqu'à sa dixième ligne.

Exercice 7

1. Démontrer de deux façons la formule $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $n \geq p \geq 1$.
2. Démontrer de deux façons que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Exercice 8

Soient n et p deux entiers naturels tels que $2 \leq p \leq n$. Montrer l'égalité

$$\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-2}^{p-2} + 2\mathrm{C}_{n-2}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-2}^p$$

1. par le calcul ;

2. par une interprétation combinatoire. (*Indication : considérer un ensemble fini E de cardinal n et deux éléments distincts de E*)

Exercice 9

1. À l'aide de la formule du binôme, démontrer que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Donner une interprétation combinatoire de cette formule.

2. Calculer de même $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p}$ et en donner une interprétation combinatoire.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$ et $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} p(p-1)\binom{n}{p}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2\binom{n}{p}$.

4. Retrouver la question précédente en dérivant (une, puis deux fois) la formule du binôme pour $(1+x)^n$.

Exercice 10

Pour n entier naturel, on note $p(n)$ le nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Le nombre de parties du produit cartésien $A \times B$ d'un ensemble A à 5 éléments avec un ensemble B à 4 éléments est-il le produit $p(5) \times p(6)$? (Sinon que représente le nombre $p(5) \times p(6)$?)

Exercice 11

1. Soit X et Y deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications injectives de X dans Y ? (La même question avec « surjectives » est naturelle, mais plus difficile.)

2. Estimer le nombre d'applications injectives de $\{1, \ldots, 30\}$ dans $\{1, \ldots, 365\}$. Sur une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité que deux élèves soient nés le même jour ? (*Paradoxe des anniversaires*)

Exercice 12

On considère n objets de différentes couleurs. Si a est un entier tel que $a \leq \sqrt{n-1}$, montrer que l'on peut trouver ou bien $a+1$ objets de la même couleur, ou bien $a+1$ objets de couleurs toutes différentes.

Exercice 13

Dans un groupe de 6 personnes, deux personnes quelconques ou bien s'aiment, ou bien se détestent. Montrer que l'on peut en trouver 3 qui sont amis, ou 3 qui sont mutuellement ennemis. (*Fixer une personne Anatole ; parmi ses 5 relations, Anatole a (au moins) 3 amis, ou 3 ennemis. Si Anatole a trois amis et que deux d'entre eux sont amis, le résultat est obtenu. Sinon...*)

Exercice 14

Soit E un ensemble fini non vide. On se propose de montrer que E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

1. On suppose dans cette question que E est de cardinal impair. Montrer que l'application $A \mapsto \mathcal{C}_E A$ est une bijection de l'ensemble des parties de E de cardinal pair sur l'ensemble des parties de E cardinal impair et conclure.

2. Dans cette question, E est un ensemble fini non vide quelconque. Soit x un élément de E. Démontrer le résultat cherché en utilisant l'application qui à une partie A de E associe $A \setminus \{x\}$ si $x \in A$ et $A \cup \{x\}$ si $x \notin A$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, déduire de la question précédente la formule $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} = 0$.

Exercice 15

1. Peut-on paver un échiquier privé de deux cases diagonalement opposées par des dominos (chacun recouvrant exactement deux cases) ?
2. Démontrer que l'on peut paver un échiquier 8×8 par des triominos en forme de L (recouvrant trois cases) de sorte à laisser vide une case quelconque prescrite à l'avance. (Remplacer 8 par 2^n, et faire une récurrence...)
3. Quels rectangles sont pavables par des triominos en forme de L ? (La réponse générale n'est, semble-t-il, pas connue...)

Exercice 16

Le principe d'inclusion-exclusion donne lieu à des inégalités : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble X, montrer par exemple que

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \leq \left| \bigcup_i A_i \right| \leq \sum_i |A_i| .$$

Exercice 17

Soit $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ qui ont exactement k points fixes (*dérangements*).

1. Montrer que $D_{n,0} + \cdots + D_{n,n} = n!$.
2. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$
3. En déduire que

$$\frac{1}{n!} D_{n,0} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Exercice 18

Le but de l'exercice est de proposer différents calculs de la quantité $Q_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

1. *Un raisonnement combinatoire.* Calculer Q_n en dénombrant l'ensemble

$$E = \big\{(A, x) \in \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}) \times \{1, \ldots, n\} \ ; x \in A\big\}$$

   de deux manières différentes.
2. *Un raisonnement algébrique.* Calculer Q_n en développant $f(X) = (1 + X)^n$ et en dérivant.
3. *Un raisonnement direct.* Calculer Q_n en utilisant une formule reliant $\binom{n}{k}$ et $\binom{n-1}{k-1}$.
4. *Un raisonnement par récurrence.* Démontrer la formule donnant Q_n par récurrence, en utilisant la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux. Quel est l'inconvénient de cette méthode ?
5. Essayer d'adapter les méthodes précédentes pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$.

Exercice 19

Soient $d \geq 0$ et $n \geq 1$ des entiers naturels. On souhaite calculer le nombre $a_{n,d}$ de solutions de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = d$ avec les x_i entiers, c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{N}^n ; \ x_1 + \cdots + x_n = d\}.$$

On introduit deux ensembles auxiliaires :

— l'ensemble F des suites strictement croissantes de n entiers $y_1, \ldots, y_n \in \{1, \ldots, n+d\}$ telles que $y_n = n+d$,

— l'ensemble G des parties à $n - 1$ éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n + d - 1\}$.

1. Calculer $a_{1,d}$ et $a_{2,d}$. Calculez $a_{n,0}$ et $a_{n,1}$.
2. Montrer que l'application $f : E \to F$ définie par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1 + 1, x_1 + x_2 + 2, x_1 + x_2 + x_3 + 3, \ldots, \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) + n \right)$$

   est une bijection.
3. Montrer que l'application $g : F \to G$ définie par $g(y_1, \ldots, y_n) = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ est une bijection.
4. En déduire la valeur de $a_{n,d}$.

Définitions
Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une propriété portant sur les couples d'éléments de E. On note $a\mathcal{R}b$ le fait que la propriété est vraie pour le couple $(a,b) \in E \times E$.
La relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E

1. est dite *réflexive* si pour tout élément x de E, on a $x\mathcal{R}x$;
2. est dite *symétrique* si pour tout élément (x,y) de E^2 tel que $x\mathcal{R}y$, on a $y\mathcal{R}x$.
3. est dite *antisymétrique* si pour tout élément (x,y) de E^2 tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, on a $x = y$.
4. est dite *transitive* si pour tout élément (x,y,z) de E^3 tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a $x\mathcal{R}z$;
5. Une relation réflexive, symétrique et transitive est appelée *relation d'équivalence.*
6. Une relation réflexive, antisymétrique et transitive est appelée *relation d'ordre.*

Un ensemble E est dit totalement ordonné pour une relation d'ordre $\mathcal{R}$ si deux éléments sont toujours comparables : $\forall x \in E, \forall y \in E, x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Exercice 20

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels : $n \sim m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est égale à celle de m.

1. Comparer 56, 89, 1211 et 4322.
2. Est-ce une relation réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?

Exercice 21

Montrer que la relation $\leqslant$ (définie sur l'ensemble des entiers naturels) est antisymétrique. Est-ce une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$?

Exercice 22

Soit $\mathcal{R}$ une relation symétrique et transitive sur un ensemble E. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant : $\mathcal{R}$ étant symétrique, $x\,\mathcal{R}\,y \Longrightarrow y\,\mathcal{R}\,x$, et comme $\mathcal{R}$ est transitive, $(x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x) \Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,x$. On en déduit que $\mathcal{R}$ est réflexive.

Exercice 23

Soit X l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit une relation $\mathcal{R}$ dans X par :
$$f\,\mathcal{R}\,g \Longleftrightarrow [\exists A > 0,\, \forall x \in]-A, A[,\, f(x) = g(x).]$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 24

Soit f une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit la relation F associée à f par : x

1. F peut-elle être une relation réflexive dans $\mathbb{R}_+^*$?
2. À quelle condition F est-elle symétrique ?
3. Montrer que F est transitive si, et seulement si, $f \circ f = f$. Donner un exemple d'une telle application (autre que l'identité).

Exercice 25

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$.
Montrer que la propriété (dite « de bon ordre ») :

toute partie non vide de E possède un plus petit élément

implique que l'ordre est total :

deux éléments quelconques sont comparables, ou en d'autres termes :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad x \leq y \quad ou \quad y \leq x.$$