approchée de ξ.

Supposons maintenant qu'on veuille approcher de la racine par des valeurs de plus en plus convergentes, mais toujours supérieures à la valeur exacte de ξ.

On passera à l'équation en ξ_1, à celle en $(\xi_1 - \Pi_1)$, puis faisant $\xi = \Pi_1 - \Xi$, ou $\Xi = -(\xi_1 - \Pi_1)$ on obtiendra l'équation en Ξ, en changeant les signes des termes de rang pair dans l'équation en $(\xi_1 - \Pi_1)$. Il ne restera plus qu'à obtenir des valeurs de plus en plus convergentes, mais toujours inférieures à Ξ; de sorte que la valeur de plus en plus approchée de $(\Pi_1 - \Xi_1)$ ou ξ_1, et par conséquent celle de ξ ou $\pi + \xi_1$, demeureront toujours plus grandes que la valeur exacte. Les approximations vers la valeur de Ξ se feront de la même manière que dans la première supposition.

(6) Prenons pour exemple cette équation que nous avons déjà résolue (54) à moins d'une unité près,

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

On a trouvé pour les coefficients de ses transformées.

En $(x-2)$ --- $1 + 6 + 10 - 1$
En $(x-3)$ --- $1 + 9 + 25 + 16$

Il résulte de ces transformées que l'équation en $(x-2)$ a une racine comprise entre 0 et 1, dont les premières valeurs, l'une en moins l'autre en plus, sont, respectivement 0 et 1. Mais, en outre, ces deux transformées fournissent immédiatement les secondes valeurs approchées de cette racine, qui sont $\frac{1}{1+10}$ ou $\frac{1}{11}$ pour la valeur en moins, et $\frac{25}{25+16}$ ou $\frac{25}{41}$ pour la valeur en plus (voyez la note (I.)).

On voit donc, en se bornant aux valeurs approchées en moins, que les deux premières sont pour la proposée...

2 et $2 + \frac{1}{11}$ ou $\frac{23}{11}$; ou bien $2,0909090909\ldots$

on reconnaîtra ci-après que cette dernière valeur est exacte dans les deux premières décimales.

Il faut maintenant, en faisant $x - 2 = \xi$ passer de l'équation

en ξ_1, à celle en ξ_2, ou $(\xi_2 - \frac{1}{11})$ on peut employer à cet effet l'algorithme modifié (note I.) de la manière suivante.

Soit $11\xi_1 = \xi_1'$; on a pour les coefficients des équations,

En ξ_1 ...... $1 + 6.11 + 10.11^2 - 1.11^3$
ou .... $1 + 66 + 1210 - 1331$
En $(\xi_1 - 1)$ .... $1 + 69 + 1345 - 54$

Substituant à $\xi_1' - 1$ sa valeur $11\xi_1 - 1$, ou $11(\xi_1 - \frac{1}{11})$ et faisant $\xi_1 - \frac{1}{11} = \xi_2$, on a pour les coefficients de l'équation.

En ξ_2 ... $11^3 + 69.11^2 + 1345.11 - 54$
ou ... $1331 + 8349 + 14795 - 54$

La limite, en moins, de ξ_2 est $\frac{54}{54+14795}$ ou $\frac{54}{14849} = \frac{1}{274 + \frac{53}{54}}$

limite à laquelle on peut substituer, pour plus de simplicité, $\frac{1}{275} = \frac{1}{11.25} = 0,0036363636\ldots$

Ainsi la 3e valeur approchée de x est...

$2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11.25}$ ou $\frac{576}{275}$; ou bien $2,0945454545\ldots$

Nous ferons voir que cette valeur est exacte jusqu'à la quatrième décimale inclusivement.

On passe ensuite, de la même manière, de l'équation en ξ_2 à celle en ξ_3 ou $(\xi_2 - \frac{1}{11.25})$ faisant $11.25\,\xi_2 = \xi_2'$ en substituant dans l'équation en ξ_2 on a pour les coefficients des équations.

En ξ_2' .... $1 + 69.25 + 1345.25^2 - 54.25^3$
ou .... $1 + 1725 + 840625 - 843750$
En $(\xi_2' - 1)$ .. $1 + 1728 + 844078 - 1399$

Substituant à $\xi_2' - 1$ sa valeur $11.25\,\xi_2 - 1$, ou $11.25(\xi_2 - \frac{1}{11.25})$ en faisant $\xi - \frac{1}{11.25} = \xi_3$ on a pour les coefficients de l'équation

En ξ_3 ..... $11^3.25^3 + 1728.11^2.25^2 + 844078.11.25 - 1399$
ou ... $20796875 + 13763750 + 232121450 - 1399$

La limite en moins de ξ_3 est

$$\frac{1399}{1399+232121430},\ \text{ou}\ \frac{1399}{232122849};\ \text{oubien}\ \frac{1}{165920+\frac{769}{1399}}$$

mais on peut pour simplifier, lui substituer

$$\frac{1}{165925}=\frac{1}{25.6637}$$

Ainsi la quatrième valeur de x, approchée en moins, est....

$$2+\frac{1}{11}+\frac{1}{275}+\frac{1}{165925}$$

ou $2,0945454545+0,0000060268\,19\ldots$,

oubien $2,0945514813\,64\ldots$

Et cette dernière valeur est exacte jusqu'à la 9e décimale inclusivement, comme on le verra plus bas.

(c) Les valeurs approchées de cette même racine, calculées par Newton, suivant le procédé qui lui appartient, sont

$$2\ \ldots\ 2,1\ \ldots\ 2,0946\ \ldots\ 2,09455147.$$

M. Lagrange a aussi calculé, suivant son procédé, les valeurs approchées de cette même racine, en fractions continues, alternativement plus petites et plus grandes qu'elle, les résultats sont

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{20},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \&c.$$

La dixième de ces valeurs, $\frac{16415}{7837}$, qui est approchée en plus étant réduite en décimales, devient 2,0945514865.

Les valeurs approchées en moins, trouvées suivant le nouveau procédé que nous indiquons dans cette note, étant

$$2\ \ldots\ 2+\frac{1}{11}\ \text{ou}\ \frac{23}{11}\ \ldots\ 2+\frac{1}{11}+\frac{1}{275}\ \text{ou}\ \frac{576}{275}\ \ldots\ 2+\frac{1}{11}+\frac{1}{275}+\frac{1}{165925}$$

oubien $2,09090909\ \ldots\ 2,0945454545\ \ldots\ 2,0945514813\,64.$

on voit que ce procédé a donné des résultats un peu plus exacts que celui de Newton, et qu'il les a donnés plus promptement qu'on ne les obtient par le procédé de M. Lagrange.

En outre, ce procédé est général et sûr, la méthode de Newton

n'a pas ces avantages. « En général, l'usage de cette méthode « n'est sûr, dit M. de Lagrange, que lorsque la valeur appro-« chée est à la fois ou plus grande ou plus petite que chacune « des racines réelles de l'équation, et que chacune des parties « réelles des racines imaginaires; et par conséquent, cette méthode « ne peut être employée sans scrupule que pour trouver la plus « grande ou la plus petite racine d'une équation qui n'a que des « racines réelles ou qui en a d'imaginaires, mais dont les parties « réelles sont moindres que la plus grande racine réelle, ou plus gran-« des que la plus petite de ces racines .... en regardant, comme on « le doit, les quantités négatives comme plus petites que les positives, « et les plus grandes négatives comme plus petites que les moins « grandes. (De la résolution des Éq. num. pag. 141.)

Si l'on employe, au lieu du procédé de Newton, la méthode d'approximation tirée des séries recurrentes, on trouve, pour les valeurs approchées de x, dans l'Équation $x^3-2x-5=0$ ....

$$2,089\ \ldots\ 2,09467\ \ldots\ 2,094549,\ \ldots\ 2,094555,5\ \ldots\ \&c.$$

On ne pourrait, ainsi que la prouve M. Lagrange, employer généralement cette méthode d'approximation pour chacune des racines réelles d'une équation quelconque, qu'autant que l'on connaîtrait d'avance une valeur approchée de cette racine, telle que la différence entre cette valeur et la vraie valeur de la racine fut moindre en quantité, c'est-à-dire, abstraction faite des signes, que la différence entre la même valeur et chacune des autres racines, et en même temps moindre que la racine quarrée de chacun des produits des racines imaginaires correspondantes, s'il y en a, diminuées de la même valeur. Autrement, cette méthode ne sert qu'à trouver la plus grande et la plus petite des racines réelles; encore faut-il que le quarré de la plus grande ou de la plus petite racine cherchée soit en même temps plus petit que chacun des produits réels des racines imaginaires correspondantes en qu'on ait quelque moyen de s'en assurer (V. pag. de la résolution

(pag. 147, 131.)

(d.) Nous avons indiqué plus haut comment on pourrait se procurer une suite de valeurs approchées de l'inconnue, convergentes en plus. Mais pour éviter les calculs inutiles, on peut, au moyen de quelques opérations ajoutées à celles qui ont donné les équations en $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_\nu$ obtenir une limite en plus de ξ_ν et par conséquent de toutes les valeurs approchées de ξ depuis la première jusqu'à la $\nu^{\text{ème}}$ nous prendrons d'abord un exemple particulier, et nous traiterons ensuite ce sujet d'une manière générale.

Dans l'exemple qui nous a servi, on a trouvé $\frac{1}{165925}$ ou $\frac{1}{25.6637}$ pour la valeur de π_3, c'est-à-dire, de la limite, en moins de ξ_3. Faisant donc $\xi_3 = \frac{1}{25.6637}\xi'_3$ et calculant les équations en ξ'_3, (ξ'_3-1), (ξ'_3-2) on trouve pour les coefficients des équations.

En (ξ'_3-1) .. $1331 + 1387721049 + 408998623104907 - 12049759756$

En (ξ'_3-2) .. $1331 + 1387723042 + 409001398548998 + 408987960067521$

Puis on fait $10^3(\xi'_3-1) = \xi''_3$; et l'on obtient les coefficients des équations

En ξ''_3 .. $1331 + 1387721049000 + 408998623104907000000 - 120497597560000000000$

En (ξ''_3-1) $1331 + 1387721052993 + 40899862588003449101993 + 396948864736628050331$

Donc la limite en plus de ξ''_3 est.

$$\frac{408998\text{------}}{408998\text{-----} + 396948\text{---}} \text{ ou bien } \frac{408998\text{------}}{805897\text{-----}}$$

On peut donc faire $\xi''_3 < \frac{409}{805}$ et par conséquent.

$$\xi'_3 < 1 + \frac{409}{805000} \text{ ; et } \xi_3 < \frac{1}{165925} + \frac{409}{165925.805000}$$

D'une autre part, on a $\xi_3 > \frac{1}{165925}$

Donc en se tenant à cette dernière valeur, l'erreur est moindre que $\frac{409}{165925.805000}$ ou $0,000000003062$.

Bien plus, dans l'exemple qui nous occupe, il suffit de jetter

les yeux sur les coefficients de l'équation en ξ''_3 pour reconnaître qu'on a.

$$\xi''_3 < \frac{1}{10} \text{ et par conséquent } \xi'_3 < 1 + \frac{1}{10000} \text{ ,}$$

$$\text{Et } \xi_3 < \frac{1}{165925} + \frac{1}{1659250000} \text{ ;}$$

Donc l'erreur est moindre que $0,000000000602689\ldots$

Il suffisait même de l'équation en (ξ'_3-1) pour s'assurer de un tel résultat, puisqu'à la seule inspection des coefficients de cette équation, on peut reconnaître qu'on a. $\xi'_3 - 1 < \frac{1}{10000}$.

Cette même équation fait voir que $\xi'_3 - 1$ est plus grand que $\frac{1}{41000}$ Donc on a

$$\xi'_3 > 1 + \frac{1}{41000} \text{ , et } \xi_3 > \frac{1}{165925} + \frac{1}{165925.41000}$$

ou $> 0,00000602689\text{---} + 0,000000000146\,9\text{---}$

ou bien $> 0,00000602696$

on a de l'autre part ....

$$\xi_3 < \frac{1}{165925} + \frac{1}{1659250000}$$

ou $< 0,00000602689\text{---} + 0,0000000006026\text{----}$

ou bien ------ $< 0,00000602742.....$

D'où la différence des deux limites est $0,000000000046\ldots$

Donc, si l'on prend une des deux limites pour la valeur de ξ_3, l'erreur ne peut avoir lieu qu'à la 10e décimale.

Ainsi la valeur exacte de x, dans l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$ est entre

$$2,094551481\,3 \text{ ---- et } 2,094551484\,4 \text{ ...}$$

Et même entre.

$$2,094551481\,5 \text{ ... et } 2,094551481\,9 \text{ ...}$$

En prenant le premier de ces nombres, ou l'un des deux derniers, pour la valeur approchée de x, on est assuré que cette valeur est exacte jusqu'à la 9e décimale, inclusivement, comme nous l'avons annoncé plus haut.

On est également assuré par ce moyen, que les deuxième &

et troisième valeurs approchées en moins, que nous avons trouvées ci-dessus pour x, sont, respectivement, exactes jusqu'à la seconde et à la quatrième décimale, inclusivement.

La dixième approximation, suivant le procédé de M. Lagrange, a bien donné la 8e décimale exacte; mais l'exactitude de cette décimale n'est pas assurée par le procédé même, vu qu'il indique pour la limite de l'erreur 0,000000163 .... ; d'où il résulte que la valeur de x est comprise entre

2,09455148702 .... et 2,0945514865

et que l'exactitude de la valeur approchée n'est garantie que pour les sept premières décimales.

(e.) Voici maintenant comment on peut procéder d'une manière générale.

Soient $\xi_\nu = X$; $\pi_\nu = \frac{1}{K}$; et $KX = X'$.

X n'ayant qu'une valeur entre 0 et 1, X' n'en a qu'une seule entre 0 et K.

on se procurera donc les deux transformées en $(X'-P')$ & $(X'-P'-1)$ dont les termes ~~dont~~ tout connus sont de signes contraires; P' étant $< K$.

Ces deux transformées fourniront déjà une double limite, en plus en moins, pour $(X'-P')$ et par conséquent pour X. mais pour avoir des limites plus resserrées, on fera $10^N(X'-P') = X''$; et comme $(X'-P')$ n'a qu'une seule valeur entre 0 et 1, X'' n'en a qu'une seule entre 0 et 10^N.

On se procurera donc les deux transformées en $(X''-P'')$ et $(X''-P''-1)$ dont les termes tout connus sont de signes contraires; P'' étant $< 10^N$.

Ces deux transformées donneront une double limite en plus & en moins, de $(X''-P'')$ et par conséquent de X' et de X

Soit la limite en moins $= \frac{1}{K''}$, et la limite en plus $= \frac{1}{K''}$

on aura $(X''-P'') > \frac{1}{K''}$ et $< \frac{1}{K''}$

d'où $X'' > P'' + \frac{1}{K''}$ et $< P'' + \frac{1}{K''}$

et $X'-P' > \frac{P''}{10^N} + \frac{1}{10^N K''}$ et $< \frac{P''}{10^N} + \frac{1}{10^N K''}$;

d'où X' ou $KX > P' + \frac{P''}{10^N} + \frac{1}{10^N K''}$ et $< P' + \frac{P''}{10^N} + \frac{1}{10^N K''}$

Enfin $X > \frac{P'}{K} + \frac{P''}{10^N K} + \frac{1}{10^N K K''}$ ....

et $X < \frac{P'}{K} + \frac{P''}{10^N K} + \frac{1}{10^N K K''}$

Si l'on prend pour X une de ces deux limites, l'erreur sera moindre que leur différence, qui est $\frac{1}{10^N K}\left(\frac{K''-K''}{K''K''}\right)$

Soit $N'+1$ le nombre de chiffres que renferme le nombre entier K. Il est évident que l'erreur sera $< \frac{1}{10^{N+N'}}$; d'où il suit que si on veut obtenir, par ce procédé, une valeur approchée, exacte jusqu'à la $n^{ème}$ décimale au moins, il faut, pour en être généralement sûr, prendre $N = n - N'$.

C'est ainsi que dans l'exemple dont on s'est servi, K ou 165923 étant composé de 6 chiffres, d'où $N' = 5$ on a du faire $N = 3$, si l'on a prétendu avoir une valeur exacte jusqu'à la huitième décimale.

Dans ce même exemple, P'' s'est trouvé $= 0$ et $P' = 1$ ce qui a rendu le calcul très-expéditif. En pareil cas, si l'on s'en tient à $\frac{1}{K}$ pour la valeur de X approchée en moins, l'erreur est toujours moindre que $\frac{1}{10^N KK''}$, et par conséquent $< \frac{1}{10^{N+N'}}$.

(f) Ce procédé pourrait être étendu à la recherche de plusieurs racines comprises entre deux nombres entiers consécutifs, & l'on tirerait pour lors un assez bon parti du Criterium que nous avons généralisé dans la note (N). mais il nous paraît inutile d'entrer dans ces détails. Notre principal objet dans cet ouvrage, a été de présenter, pour la résolution des équations numériques, une méthode qui fût praticable comme mécaniquement.

La science du calcul pouvant de même que les arts, avoir des manouvriers, et en tirer, dans des travaux en grand, de nobles avantages. Sous ce rapport, notre méthode générale sera peut-être préférée au procédé particulier que nous donnons ici, surtout si l'on veut avoir des racines exactes que jusqu'à la seconde ou troisième décimale.

(g) L'évaluation des racines en fractions continues, suivant le procédé de Mr Lagrange, est particulièrement recommandable, lorsqu'elle fait connaître les facteurs commensurables du second degré dans un polynome qu'on se propose de décomposer en facteurs de ce degré, mais quand il ne s'agit que de la résolution proprement dite, d'une équation numérique, ce procédé ne nous paraît pas préférable à l'approximation en nombres décimaux soit pour la commodité des calculs, soit pour la rapidité de l'approximation. De plus la méthode de M. Lagrange et la nôtre étant de telle nature qu'on y procède simultanément à la vérification et à l'approximation des racines, il semble que c'est surtout à ces deux méthodes que l'évaluation des racines en fractions continues ne saurait être généralement convenable. Par exemple, dans celle de l'illustre géomètre, si le nombre D, ou la limite de la plus petite différence des racines, était un millième, il est évident que chaque racine serait tout-à-la fois reconnue et appréciée, à moins d'un millième près. Or il paraît infiniment dur, lorsqu'on a obtenu par des milliers de substitutions, une valeur aussi approchée, d'être forcé de rétrograder jusqu'à la valeur du plus grand nombre entier contenu dans cette racine, pour chercher une nouvelle évaluation en fractions continues.

C'est par un semblable motif, joint à quelques autres, que nous n'avons pas cru devoir adapter ce procédé à notre méthode; et ce motif semble plus décisif encore dans la méthode de Mr de Lagrange, qui exige un bien plus grand nombre d'opérations

pour la manifestation des premières limites des racines. En effet, lorsque D est, par exemple, un millième, on ne peut, suivant la méthode dont il s'agit, découvrir deux racines à moindres que l'unité, telles que 0,920 ... et 0,921 ... qu'au moyen de 922 substitutions, tandis que le nombre des transformées exigées pour le même objet dans la nouvelle méthode, égale seulement 10 + 3 + 2, c'est-à-dire, 15. En un mot, s'il faut découvrir une racine ayant n décimales, la recherche de ces décimales n'exige au plus que 10. n transformations, tandis qu'elle peut exiger jusqu'à 10^n substitutions suivant la progression 0, D, 2D, &c.

(h) La comparaison que nous venons de présenter, concernant le nombre d'opérations, dans la nouvelle méthode des transformées, et dans la méthode des substitutions successives, telle qu'elle a été perfectionnée par Mr Lagrange, a donné lieu à une observation qu'il est bon de rapporter ici, ne fût-ce que pour empêcher qu'elle ne soit désormais reproduite.

" Si la résolution des équations, a-t-on dit, exigeait l'emploi
" d'une pareille méthode (celle de M. Lagrange) assurément celle
" de l'auteur quoique très-longue mériterait la préférence. Mais
" pour l'ordinaire, on ne procède pas ainsi. La méthode de Newton
" qui est la plus usitée, suppose qu'on connaît, soit par la
" voie des substitutions, soit par des constructions géométriques,
" une première valeur de x, qui approche au moins dix fois plus
" d'une racine de l'équation que de toute autre racine, et d'après
" cette valeur, on en trouvera facilement une autre dont l'erreur
" n'est qu'environ le quarré de la première, savoir $\frac{1}{100}$, si la
" première valeur en $\frac{1}{10}$. Une seconde opération qu'on peut
" faire par la même formule, réduit l'erreur du centième à son
" quarré qui est d'environ $\frac{1}{10000}$ & ainsi de suite. D'où l'on voit
" que l'approximation continuelle est beaucoup plus rapide
" par cette méthode que par celle de l'auteur. (Il s'agit de

« celle que nous avons exposée au Chapitre 6.

Une pareille observation prouve que son auteur n'a nullement compris l'état de la question. Nous nous sommes proposé de comparer deux méthodes qui, l'une et l'autre, procèdent simultanément à la vérification et à l'approximation des racines, et qui jouissent, toutes deux, de l'avantage de résoudre généralement et avec certitude, une équation numérique, dans des cas où toutes les méthodes précédentes échouent, ou n'aboutissent qu'à des résultats faux ou douteux ; et l'on vient nous opposer le procédé de Newton, qui n'est pas même une méthode de résolution proprement dite, et qui d'ailleurs, comme nous l'avons dit plus haut d'après Mr Lagrange, n'a pas même le mérite d'être généralement sûr ! Ce procédé, fût-il aussi sûr qu'il l'est peu, est évidemment insuffisant pour l'approximation des racines qui, étant par exemple, 8,1, ... 8,2 ... 8,3 ... ont une même première valeur 8, tandis que dans notre méthode il ne faut que quelques instants pour découvrir la décimale de chacune de ces racines. Et c'est un procédé aussi incertain qu'incomplet qu'on a prétendu opposer à une méthode générale et sûre !

Encore une fois, nous en appelons à la pratique. Qu'on se donne la peine de résoudre les équations numériques par les diverses méthodes, et l'on verra qu'abstraction faite du procédé approximatif indiqué dans cette note, notre méthode générale, même en ne faisant découvrir, qu'un à un, les chiffres de la racine, est encore celle qui, dans son ensemble, se trouve en même temps la plus sûre et la plus expéditive. De plus, dans certains cas, on sera forcé de reconnaître qu'elle est la seule praticable.

Il faut l'avouer, cette observation, que nous avons rapportée textuellement, et l'objection citée au No 48, réunies à quelques

autres indices, ont paru provenir d'une disposition d'esprit peu favorable, et nous ont rappelé la pensée de Pascal au sujet de ceux qui l'inventent. Il faut sans doute, suivant son conseil, que celui qui a rencontré quelques inventions, ne se pique point de cet avantage. Quand on considère un objet sous toutes ses faces, avec une attention persévérante, il est difficile qu'il ne se présente pas à l'esprit quelques vues nouvelles ; et ce qui semble réduire à peu de chose cette gloire à laquelle on croit pouvoir prétendre par des inventions scientifiques, c'est que la science même a des hasards, et que souvent les inventions s'offrent comme fortuitement à l'esprit, à l'instant même où ses recherches se portaient ailleurs. Mais il peut, du moins, être permis à l'auteur d'une découverte utile, de désirer que la communication qu'il en donne, soit accueillie avec quelque bienveillance.

(X) Quoique l'on puisse tirer quelque parti de la nouvelle méthode pour la détermination des racines imaginaires, nous ne nous arrêterons point à cet objet, qui appartient au problème de la décomposition d'un polynome en facteurs réels du second degré, plutôt qu'à celui de la résolution des équations numériques, l'objet essentiel de cette résolution étant de trouver les valeurs réelles qui peuvent être attribuées à l'inconnue. C'est ce qu'a reconnu Mr Lagrange, lorsqu'il a donné des moyens de trouver une limite de la plus petite différence des racines, sans recourir à l'équation aux quarrés de leurs différences.

Cependant l'illustre auteur a cru pouvoir surabondamment se servir de cette équation, qui donne la valeur de la quantité B précédée du signe $-$ sous le radical dans les racines imaginaires, pour déterminer, au moins par approximation, la partie réelle de ses racines. Pour cela on substitue $A+\sqrt{-B}$ à x, dans la proposée, et on en tire deux équations en A, dont l'une a tous ses termes réels, et dont l'autre a tous ses termes multipliés par $\sqrt{-B}$, facteur commun que l'on fait disparaître ; ce qui rend les termes de la seconde équation tous réels, parce qu'ils ne dépendent alors, ainsi que ceux de la première que du quarré de $\sqrt{-B}$ c'est-à-dire, $-B$.

Ensuite procédant à la recherche du plus grand commun diviseur de ces deux équations, on s'arrête au reste où A n'est plus qu'au degré n ou au dessous, n étant le nombre des valeurs égales que l'équation aux quarrés des différences a fournies pour B. Ce reste étant égalé à zéro, on y substitue à B sa valeur exacte ou approchée, et cette équation étant ainsi devenue numérique, on en tire les valeurs réelles de A.

Cette résolution, a, comme on voit, l'inconvénient d'exiger la formation de l'équation aux quarrés des différences; mais en outre il semble qu'on puisse douter qu'elle soit généralement exacte dans le cas où le plus grand commun diviseur est de plusieurs dimensions. Car la substitution de la valeur approchée de B ne donnant aux coefficiens de l'équation en A qu'une valeur approchée, ne peut-il pas arriver que cette altération, même très-légère, change la nature des racines de l'équation, en substituant des racines imaginaires à des racines réelles, et *vice versâ*.

Lorsque le reste égalé à zéro est seulement du 1er degré, et qu'on a ainsi déterminé la valeur de A en fonction de B, il semble qu'en y donnant à B deux valeurs respectivement approchées en plus et en moins, il en doit provenir deux limites entre lesquelles se trouve la valeur exacte de A. Cependant le résultat obtenu par Mr Lagrange, dans l'équation $x^3-2x-5=0$ est évidemment fautif. D'après ce résultat la valeur de A serait comprise entre $-\frac{15}{16}$ et $\frac{13}{18}$ (de la rés. num. pag. 39.) or on a vu plus haut que la racine positive de l'équation est bien certainement 2,0945... et son second terme ayant zéro pour coefficient, il s'ensuit avec la même certitude, que A égale la moitié de cette racine positive précédée du signe $-$; on voit donc que la valeur exacte de A est comprise entre $-1,047$ et $-1,048$.... Ce résultat

n'est nullement d'accord avec le précédent, ce qui vient apparemment de quelque erreur de calcul.

L'observation que nous avons faite sur le changement possible de la nature des racines d'une équation par une légère altération dans la valeur de ses coefficiens, peut aussi inspirer quelque doute sur la légitimité de la résolution de deux équations à deux inconnues x et y lorsqu'après l'élimination de x, on obtient pour y une valeur seulement approchée, dont la substitution ne peut produire que des coefficiens d'une valeur approchée pour l'équation en x. La même difficulté se rencontre dans la décomposition d'un polynome en facteurs du second degré.

D'une autre part, il serait extrêmement fâcheux de ne pouvoir en aucun cas, se fier aux résultats qu'on obtiendrait d'une équation numérique, propre à résoudre un problème physico-mathématique lorsqu'on n'a point la valeur rigoureuse de ses coefficiens. Il est donc à désirer que l'on trouve quelque règle certaine qui fasse connaître quelles sont les équations dont les racines ne changent point de nature, malgré l'altération produite dans leurs coefficiens.

(Y) On aurait un grand embarras de moins, si l'on pouvait découvrir toutes les valeurs réelles de l'inconnue, sans dépouiller l'équation des racines égales qu'elle peut avoir. On a vu que, dans notre méthode, (46.) la présence des racines égales commensurables ne forme point un obstacle à la résolution d'une équation; il est aisé d'apercevoir que la présence des racines égales imaginaires n'en forme pas davantage. Bien plus, lorsqu'on sait d'avance que toutes les racines de l'équation sont réelles, on peut la résoudre, sans qu'elle ait été préalablement dépouillée de ses racines multiples, même de celles qui sont réelles incommensurables. Car une fois qu'on sera parvenu à reconnaître l'existence d'une racine, au moins, entre deux limites qui ne diffèrent que d'une unité décimale de l'ordre que l'on veut, ou qu'exige le problème dont la solution dépend de l'équation à résoudre, il est indifférent, pour la pratique, que la valeur trouvée appartienne à une ou à plusieurs racines, soit absolument égales entre elles, soit égales seulement jusqu'à tel chiffre demandé. L'essentiel est que l'on connaisse toutes les valeurs réelles qui représentent, jusqu'au degré requis d'exactitude, celles dont l'inconnue de l'équation est susceptible.

D'après cette considération, on pourrait même, dans tous les cas, laisser subsister les racines égales d'une équation numérique, si l'on avait le moyen de connaître une limite, en moins, de la valeur de φ, c'est-à-dire, de la plus petite valeur que pourrait avoir la partie des racines imaginaires représentées par $A \pm \sqrt{-\varphi}$ précédée du signe − sous le signe $\sqrt{\ }$.

En effet, lorsque l'existence d'une couple de variations dans la collatérale en $(z_{p}-1)$ a donné lieu de présumer qu'il y a une couple de racines réelles entre 0 et 1, dans l'équation en $(x-p)$ et qu'on est ensuite parvenu à l'équation en $(x^{(n)}-p^{(n)})$ et à sa collatérale, sans que cette présomption soit détruite, on en peut conclure que la présomption se change en certitude, quand on sait d'ailleurs que, si les deux racines qui occasionnent les variations dont il s'agit étaient des imaginaires de la forme $A \pm \sqrt{-\varphi}$, la valeur de φ serait, d'après la limite en moins, plus grande que $\frac{1}{A \times 10^{2n}}$; car, dans ce cas, l'existence de ces racines imaginaires devrait se manifester par l'équation collatérale en $(z^{(n)}_{p^{(n)}}-1)$ qui n'aurait point de variations de signe, et la présomption de l'existence des racines réelles entre p et $p+1$ devrait être ainsi détruite. (66.)

Or il paraît qu'en substituant $\sqrt{-\varphi}$ à l'inconnue de l'équation en $\left(x-p-\frac{p'}{10}-\dots-\frac{p^{(n)}}{10^n}\right)$, on peut déterminer une limite de la plus petite valeur dont φ soit susceptible, la valeur de la partie réelle A étant supposée exister entre

$$p+\frac{p'}{10}+\dots+\frac{p^{(n)}}{10^n} \quad \text{et} \quad p+\frac{p'}{10}+\dots+\frac{p^{(n)}+1}{10^n}$$

l'objection qui résulte de la légère altération des coefficiens, se représente ici, mais moins grave que dans la note précédente. Il semble bien que cette altération, toute légère qu'elle puisse être, suffit pour rendre positif, dans l'équation en φ, tel coefficient, qui eut été négatif, si l'on n'avait pas pris pour A une valeur simplement égale à $p+\frac{p'}{10}+\dots+\frac{p^{(n)}}{10^n}$; ou bien, <u>vice versâ</u>

Mais cet inconvénient ne paraît pas devoir pas conduire qu'à l'obligation de modifier la manière de déterminer la limite en moins, des racines d'une équation numérique. Cette manière dépend comme on sait, de celle de trouver la limite, en plus, des racines de l'équation inverse. C'est donc cette dernière détermination qu'il faudra modifier, en prenant le plus grand de tous les coefficiens de cette équation, au lieu du plus grand coefficient de signe contraire à celui du premier terme. Au surplus, nous n'entendons donner ici qu'un simple aperçu, concernant la possibilité de conserver les racines égales dans la nouvelle méthode.

(Z) On voit que nous sommes frayé une route bien différente de celle qui a été tracée par l'illustre auteur du Traité de la résolution des équations numériques. Mais c'est en nous fortifiant par la lecture de ses écrits, que nous avons appris à marcher seuls, et nous nous plaisons à lui rendre cet hommage.

Tout en recommandant aux auteurs de son temps, la lecture assidue des écrits des grecs

<u>Vos exemplaria græca</u>
<u>Nocturnâ versate manu, versate diurnâ.</u>

Horace ne savait pas mauvais gré aux écrivains de Rome de ne pas se traîner servilement sur les pas de leurs maîtres, et d'oser aussi marcher dans leurs propres voies.

<u>Nec minimum meruere decus vestigia græca</u>
<u>ausi deserere.</u>

Notes sur le traité précédent.

(a'). Si l'Équation proposée n'est que du 3e Degré, on peut obtenir les coefficiens de ses transformées en $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$, &c. par un moyen plus rapide que l'algorithme général.

En effet nous avons vu que pour l'Équation $x^3-7x+7=0$. les coefficiens des transformées successives étaient:

$1+0-7+7$
$1+3-4+1$
$1+6+5+1$
$1+9+20+13$.

or je remarque que le coefficient de la plus haute puissance est toujours l'unité.

2o. les coefficiens des seconds termes sont la suite des nombres 3, 6, 9, 12, 15, &c.

3o. les coefficiens des 3èmes termes se forment de la somme du 2nd terme de la suite sur laquelle on opère, et des 2nd et 3ème termes de la suite précédente.

ainsi $-4 = 3+0-7$
$+5 = 6+3-4$
$+20 = 9+6+5$.

4o. les 4èmes termes se forment de la somme de tous les termes de la suite précédente.

ainsi $+1 = 1+0-7+7$
$+1 = 1+3-4+1$
$+13 = 1+6+5+1$.

Faisons l'application de cette théorie au 2ème Exemple, nous aurons. Pour $x^3 - 2x - 3 = 0$

$1+0-2-3$	$3+0-2=1\ ,\ 1+0-2-3=-6$
$1+3+1-6$	$6+3+1=10\ ,\ 1+3+1-6=-1$
$1+6+10-1$	$6+9+10=25\ ,\ 1+6+10-1=16$
$1+9+25+16.$	

Ceci n'a lieu que pour l'Equation du 3e degré qui manque de 2e Terme. Dans le cas contraire les coefficiens se forment par le moyen donné dans la note C pag. 43.

(b') Chercher les Transformées en $(x-\frac{1}{10})$, $(x-\frac{1}{20})$, $(x-\frac{1}{30})$ &c de l'Equation. $x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0$.

Faisons pour cela $x = \frac{x'}{10}$ nous aurons.

$$\frac{x'^3}{1000} - \frac{4x'^2}{100} + \frac{3x}{10} - 6 = 0$$

$$x'^3 - 40x'^2 + 300x' - 6000 = 0.$$

Pour x'	$1-40+300-6000$	Pour $(x'-1)$. $b+3a=-40+3=-37$
$(x'-1)$	$1-37+223-5739$	$c+2b+3a=300-80+3=223$
$(x'-2)$	$1-34+152-5552.$	$c+a+b+d=301-6040=5739.$
$(x'-3)$	$1-31+87-5433.$	Pour $(x'-2)$ $b+3a=-37+3=-34$
		$c+2b+3a=226-74=152$
		$a+b+c+d=224-5776=-5552$ &c.

or. $x' = 10x$

$x'-1 = 10x-1$

$x'-2 = 10x-2$

$x'-3 = 10x-3$. donc

pour $(x-\frac{1}{10})$, $1-3{,}7+2{,}23-5{,}739$

$(x-\frac{2}{10})$, $1-3{,}4+1{,}52-5{,}552$

$(x-\frac{3}{10})$, $1-3{,}1\ ,\ 0{,}87-5{,}433$. Ainsi de suite.

on opérerait de la même manière pour avoir les Transformées en $(x-\frac{1}{100})$, $(x-\frac{2}{100})$, $(x-\frac{3}{100})$, &c.

Ainsi de suite.