Nouvelle Méthode pour la résolution des Équations Numériques d'un degré quelconque

Par Budan.

Chapitre premier.

Histoire abrégée des travaux entrepris sur cette matière pendant les deux derniers Siècles.

1. Le problème de la résolution des équations numériques peut être regardé, suivant l'illustre successeur d'Euler comme le point le plus important de toute l'analyse. La raison qu'il en donne est que la solution de tout problème déterminé conduit à une ou plusieurs équations numériques, c'est-à-dire, dont les coefficiens sont donnés en nombres; que tout le calcul qu'on a fait est en pure perte, si l'on n'a pas les moyens de résoudre ces équations; que dès le troisième degré l'expression algébrique des racines est insuffisante pour faire connaître, dans tous les cas, leurs valeurs numériques; qu'à plus forte raison le serait-elle, si on parvenait enfin à l'obtenir pour les équations des degrés supérieurs; et qu'on serait toujours forcé de recourir à d'autres moyens pour déterminer, en nombres, les valeurs des racines des équations données; détermination qui est, en dernier résultat, l'objet de tous les problèmes que le besoin ou la curiosité offrent à résoudre (Séances des écoles normales Tom. 3. p. 463, 476.)

2. Indépendamment d'une autorité aussi grave sur ce point, l'importance de ce problème est assez démontrée par les efforts multipliés d'un grand nombre d'analystes célèbres des 17e et 18e siècles, pour obtenir une méthode générale directe et sûre, propre à faire découvrir toutes les racines réelles d'une équation numérique donnée. Nous allons présenter une légère esquisse des travaux de ces analystes, en prenant pour guide l'illustre auteur déjà cité.

3. Viète, qui le premier, s'occupa de la résolution des équations numériques d'un degré quelconque, y employa des opérations analogues à celles qui servent à extraire les racines des nombres. Harriot, Oughtred, &c. ont essayé de faciliter la pratique de la méthode. « mais la multitude des opérations qu'elle « demande, et l'incertitude du succès dans un grand nombre de « cas, l'ont fait abandonner entièrement avant la fin du 17e « siècle » (De la résolution des équations num. par Lagrange, pag. 1)

4. La méthode de Neuton a succédé à celle de Viète, ce n'est proprement qu'une méthode d'approximation, qui suppose qu'on connaît déjà la racine cherchée, à une quantité près, moindre que le dixième de cette racine. « elle ne sert, comme on voit, que « pour les équations numériques déjà à peu près résolues ; de plus « elle n'est pas toujours sûre ; elle a encore l'inconvénient de ne « donner que des valeurs approchées des racines mêmes qui peuvent « être exprimées exactement en nombres, et de laisser en doute si « elles sont commensurables ou non. » (Lagrange. Pag. 3.)

5. La méthode que Daniel Bernoulli a déduite de la considération des séries récurrentes, et qu'Euler a exposée dans son introduction à l'analyse infinitésimale, n'offre aussi qu'un moyen d'approximation « cette méthode et celle de Neuton, quoique « fondées sur des principes différens, reviennent à peu près « au même dans le fond, et donnent des résultats semblables. (Lagrange pag. 152.).

6. Ce fut Hudde qui trouva qu'en multipliant chaque terme

d'une équation donnée par l'exposant de l'inconnue, et en égalant le produit total à zéro, on obtient une équation qui renferme les conditions de l'égalité des racines de la proposée. Rolle, de l'académie des sciences, découvrit ensuite que les racines de l'équation ainsi formée sont les limites de celles de l'équation proposée. Ce principe est la base de la méthode des cascades publiée d'abord sans démonstration, dans son traité d'algèbre en 1690. Cette méthode a été ainsi nommée, parce qu'elle fait dépendre la détermination des limites de chacune des racines de l'équation proposée, de la résolution de différentes équations successives qui vont toujours en baissant d'un degré. « la longueur « des calculs que cette méthode demande, et l'incertitude qui naît « des racines imaginaires, l'ont fait abandonner depuis longtemps. (Lagrange. p. 166.) Rolle dans ce même traité d'algèbre, assigne pour limite de la plus grande valeur de l'inconnue, le plus grand coefficient négatif de l'équation, augmenté d'une unité, le coefficient du 1er terme étant 1.

7. La méthode de Stirling, pour déterminer le nombre et les limites des racines réelles du 3e et du 4e degré a été généralisée depuis par Euler dans son traité du calcul différentiel « elle « revient dans le fond à celle de Rolle (Lagrange. p. 166.)

8. En 1747 le célèbre Fontaine donna, sans démonstration, une nouvelle méthode. Je la donne, disait-il, pour l'analyse en entier, que l'on cherche si inutilement depuis l'origine de l'algèbre. Cette méthode suppose que l'on peut toujours, par la substitution des nombres, 1. 2. 3. &c. au lieu de l'inconnue dans les équations qu'elle emploie, trouver deux nombres qui donnent des résultats de signes différens : « ce qui n'a lieu, dit « Mr Lagrange, qu'autant que ces équations ont des racines « positives, dont la moindre différence est plus grande que l'unité « (ou pour parler plus exactement, qu'autant qu'il y a des « racines qui ne sont pas comprises en nombre pair, entre deux « nombres entiers consécutifs). D'après cette considération, il « est facile de trouver des exemples où la méthode de Fontaine

« est en défaut. » (Lagrange, p. 162.)

9. Ce défaut avait lieu également dans toute méthode qui employa les substitutions pour déterminer les limites des racines réelles et inégales d'une équation numérique, lorsque Mr Lagrange publia, dans les mémoires pour l'académie de Berlin pour l'année 1767 un nouveau procédé, le seul qui ait offert jusqu'ici un moyen direct et sûr d'obtenir cette détermination. Son mémoire contenait aussi une méthode pour approcher, autant qu'on veut, en employant l'expression la plus simple, de la valeur exacte d'une racine, lorsqu'on connaît le plus grand nombre entier compris dans cette valeur.

Le procédé dû à Mr de Lagrange, consiste à substituer successivement, à la place de l'inconnue, dans l'équation débarassée des racines égales qu'elle peut avoir, les termes d'une progression arithmétique 0, D, 2D, 3D &c dont la différence D soit moindre que la plus petite différence des diverses racines de cette équation. La grande difficulté était de trouver ce nombre D : le génie fécond de l'illustre géomètre lui fournit trois ~~moyens~~ manières d'y parvenir.

10. La première, qu'il proposa en 1767, exige le calcul de l'équation qui a pour racines les différences entre les racines de l'équation proposée. « Mais, dit Mr Lagrange, pour peu que le « degré de l'équation proposée soit élevé, celui de l'équation des dif- « férences monte si haut, qu'on est effrayé de la longueur du calcul « nécessaire pour trouver la valeur de tous les termes de cette équation, « puisque le degré de la proposée étant <u>m</u> on a $\frac{m.m-1}{2}$ coefficients « à calculer (par exemple, pour une équation du 10e degré, la « transformée serait du 45e.)

« Comme cet inconvénient pouvait rendre la méthode générale « presque impraticable dans les degrés un peu élevés, je me suis « longtemps occupé des moyens de l'affranchir de la recherche de « l'équation des différences, et j'ai reconnu en effet que, sans cal- « culer entièrement cette équation, on pouvait néanmoins trouver « une limite moindre que la plus petite de ses racines ; ce qui est le

« but principal du calcul de cette même équation (Lagrange, p. 126)

11. La seconde manière de trouver le nombre D est consignée dans les leçons que l'auteur donna aux écoles normales en 1795. Elle demande le calcul d'une équation du même degré que la proposée, ayant pour ses racines les différentes valeurs dont est susceptible le coefficient Y de l'avant-dernier terme d'une équation en $(x-a)$: a étant une racine réelle quelconque de la proposée, dont x est l'inconnue : « mais cette équation en Y, dit Mr Lagrange, peut encore « être fort longue à calculer, soit qu'on la déduise de l'élimination, « soit qu'on veuille la chercher directement par la nature même de « ses racines. » (Lagrange, p. 127)

12. Le coefficient Y étant une fonction de <u>x</u>, l'auteur a fait depuis réflexion qu'on pouvait toujours éliminer l'inconnue x du produit du polynome Y multiplié par un polynome ξ à coefficients indéterminés, procédant suivant les puissances $m-1$, $m-2$, &c de x, en faisant disparaître du produit $Y\xi$, au moyen de la proposée, toutes les puissances de x plus hautes que x^{m-1}, puis égalant à zéro chacun des multiplicateurs de x, ce qui donne la valeur des coefficients indéterminés de ξ, et réduit le produit $Y\xi$ à son terme tout connu représenté par K, d'où $Y=\frac{K}{\xi}$. Par suite de ces opérations, les coefficients de l'équation inverse de celle aux différences, qui étaient divisés par Y, ne sont plus affectés que d'un diviseur indépendant de x, et la recherche de D en devient moins pénible. Ce troisième procédé, publié en 1798, est moins rebutant que les deux autres ; néanmoins son auteur reconnaît qu'il peut entraîner dans des calculs assez longs. (Lag. p. 223)

13. « Le nombre D (trouvé d'une de ces trois manières) pourra « être souvent beaucoup plus petit qu'il ne serait nécessaire pour « faire découvrir toutes les racines ; mais dit, Mr de Lagrange, il « n'y a à cela d'autre inconvénient que d'augmenter le nombre des « substitutions successives ~~pà~~ à faire pour x dans la proposée. (« Séances des écoles normales, Tome 3. p. 466.) Cet inconvénient

paraît encore assez grave dans la pratique, car il peut, en certains cas, donner lieu à des milliers, et même à un nombre indéfiniment plus grand, d'opérations superflues. Du reste, l'auteur l'a considérablement diminué, en donnant le moyen d'opérer, par de simples additions et soustractions, les substitutions de nombres entiers qui suivent celles des m premiers nombres 1. 2. 3. &c. dans une équation du degré m.

14. Il semble donc que la méthode de la limite de la plus petite différence des racines, qui d'ailleurs porte l'empreinte du génie de son immortel auteur, ne répond pas, en tout point, à l'objet qu'il s'est proposé, qui est de déterminer les premières valeurs
" à substituer pour x, de sorte que, d'un côté, on ne fasse pas de
" tâtonnements inutiles, et que, de l'autre, on soit assuré de découvrir
" par ce moyen, toutes les racines réelles de l'équation " (Séances des écoles normales tome 3, p. 477.) Nous ferons voir dans les chapitres suivants qu'on peut, à beaucoup moins de frais et sans recourir à cette longue et pénible recherche de la limite de la moindre différence des racines, se procurer toujours cette assurance.

15. En outre, le désir du célèbre auteur étant que les règles de la résolution des équations numériques soient données dans l'arithmétique, sauf à renvoyer à l'algèbre les démonstrations qui dépendent de cette dernière science, ne peut-on pas dire que ce vœu ne se trouve point rempli par une méthode dont la théorie est trop compliquée, et la pratique trop difficile pour des commençans.

16. Il restait donc encore à glaner dans ce même champ où M. Lagrange a recueilli une si abondante moisson. Nous avons cherché à réaliser son projet, en découvrant une méthode nouvelle d'une théorie simple et d'une application facile. Nous présentons aux jeunes élèves un aliment de facile digestion, dont peut-être ils nous sauront quelque gré : ~~Nous~~ n'osons nous flatter

d'obtenir le même accueil des personnages consommés dans la science : suivant un ancien adage, les mouches ne sont point la pâture des aigles, *aquila non capit muscas*. On voudra bien cependant observer que les méthodes des anciens, lesquelles supposaient un grand travail, une grande force de tête, ont cédé la place, dans l'enseignement, à des méthodes modernes plus à la portée du vulgaire ; nous espérons que cette considération préservera d'un superbe dédain les procédés aussi faciles à pratiquer qu'à concevoir, que nous offrons en ce moment au public.

17. A cette considération il faut en joindre une autre, tirée du besoin que l'on a d'une méthode qui soit praticable, et vraiment usuelle pour la résolution des équations numériques, si l'on veut que l'algèbre puisse s'appliquer convenablement aux arts et aux besoins de la société. Nous rappellerons, à ce sujet, ce que disait l'académicien Rolle, lorsqu'il publia sa méthode des cascades.
" Lorsqu'on a envisagé toutes les conditions qui sont nécessaires
" pour le succès d'une entreprise, on pourrait souvent s'aider
" de l'algèbre pour y réussir ou pour en connaître l'impossibilité ;
" mais on aime mieux chercher d'autres conditions, ou tenter
" l'exécution par différents moyens, que d'avoir recours à cette
" science, et, en cela, on a quelque raison : car si l'on veut se servir
" de l'algèbre dans l'invention d'une machine ou pour quelque
" autre recherche, en n'employant d'ailleurs que les expériences
" des physiciens et les principes des géomètres, on arrivera à des
" égalités (équations) irrationnelles d'un degré fort élevé, et il est plus
" difficile d'éviter ces égalités dans cette application, que d'éviter les
" fractions quand on pratique l'arpentage. Cependant les règles
" qu'on a données jusqu'ici pour résoudre ces égalités, ne sont ni
" scientifiques ni générales, et il suffit de les éprouver pour en être
" rebuté " On a aujourd'hui, à la vérité, des règles scientifiques & générales ; mais quel est celui qui les ayant essayées, pourra dire qu'elles ne sont pas rebutantes.

18. Si dans cette esquisse des travaux de deux siècles, concernant la résolution des équations numériques, l'immortel Descartes semble avoir été oublié, c'est que nous nous sommes réservé d'en parler ailleurs. Comment aurions-nous pu oublier la fameuse règle des variations et des permanences de signes, publiée pour la première fois en 1637, et qui, longtemps négligée, reçoit dans notre méthode une application nouvelle, et en quelque sorte une nouvelle existence.

Chapitre 2.

Problème préliminaire. Étant donné une équation numérique en x d'un degré quelconque, trouver, par de simples additions et soustractions, les coefficients de sa transformée en $(x-1)$; et généralement, de sa transformée en $(x-n)$, n étant un nombre entier ou décimal.

19. Avant que de donner la solution de ce problème, nous expliquerons ce qu'il faut entendre par les sommes 1ères, 2es, 3èmes &c. d'une suite de termes.

Lorsqu'une suite de termes quelconques étant donnée, on forme une autre suite sommatoire de la première, c'est-à-dire, qui a pour loi que son $n^{ième}$ terme soit la somme des n premiers termes de la suite donnée, cela s'appelle prendre les sommes premières, ou simplement les sommes de la 1re suite.

Ce mot somme doit s'entendre dans le sens algébrique; il exprime l'excédent de la somme des termes précédés des signes + ou − sur celle des termes précédés du signe contraire.

Prendre ensuite les sommes de ces sommes premières, cela s'appelle prendre les sommes secondes de la suite

donnée. De même, les sommes de ces sommes secondes, s'appellent les sommes troisièmes de la première suite, et ainsi du reste.

Voici un exemple de ces diverses sommes.

Suite donnée	1 ...	1 ...	1 ...	1 ...	1
Sommes premières ...	1 ...	2 ...	3 ...	4 ...	5
Sommes secondes ...	1 ...	3 ...	6 ...	10 ...	15
Sommes troisièmes ...	1 ...	4 ...	10 ...	20 ...	35.
&c.		&c.			

Les suites dont on s'est servi dans ce premier exemple, appartiennent à celles des nombres que les géomètres appellent nombres figurés, (voyez le Chap. V de l'algèbre d'Euler) lesquelles ont généralement pour premier terme l'unité; pour 2e terme un nombre entier m, et pour $n^{ème}$ terme un terme exprimé par $\frac{m(m+1)\cdots(m+n-2)}{1\cdot 2\cdots\cdots(n-1)}$.

Autre exemple, dans lequel la suite donnée est composée de termes pris arbitrairement, les uns positifs, les autres négatifs:

Suite donnée	$2+5-3+4-3+0-1$
Sommes premières ..	$2+7+4+8+5+5+4$
Sommes secondes ..	$2+9+13+21+26+31+35$
Sommes troisièmes ..	$2+11+24+45+71+102+137$
&c.	&c.

20. Voici maintenant deux propositions d'où résulte la solution demandée. (Pour les démonstrations, voyez ci-après les notes.)

Première proposition. La somme $m^{ème}$ des n premiers termes d'une suite quelconque, égale la somme de ces termes multipliés respectivement, mais en ordre inverse, par les n premiers nombres figurés de l'ordre m c'est-à-dire, appartenant à la suite dont le second terme est m

ainsi la somme $m^{ème}$ des n premiers termes de cette suite :

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-1}$$

Est égale à $A_{n-1} + m A_{n-2} + \cdots + \frac{m \ldots (m+n-2)}{1 \ldots (n-1)} A_0$

Par exemple la somme 3e de ces 4 termes $2+5-3+4$, est $(1\times4 - 3\times3 + 6\times5 + 10\times2) = 45$ de même qu'on l'a trouvé plus haut en prenant les sommes et les sommes des sommes.

Seconde proposition. un polynome quelconque, procédant suivant les puissances entières et positives d'une quantité x, depuis le degré m jusqu'au degré zéro, se transforme en un autre polynome d'égale valeur, procédant suivant les mêmes puissances de $(x-1)$, dont les coefficiens respectifs, à commencer par celui du dernier terme, sont :

1° la somme première de tous les coefficiens du polynome donné.

2° la somme seconde de tous les coefficiens hormis le dernier.

3° la somme troisième de ces coefficiens, excepté les deux derniers, et ainsi de suite.

Soit, par exemple, ce polynome

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$$

Coefficiens donnés . . . . $2 - 3 + 5 - 3$
Sommes premieres . . . . $2 - 1 + 4 + 1$
Sommes secondes . . . . $2 + 1 + 5$ . . .
Sommes troisiemes . . . $2 + 3$ . . . . . .
Sommes quatriemes . . . . 2 . . . . . .

ainsi les coefficiens du polynome en $(x-1)$ sont . . .

$$2 + 3 + 5 + 1$$

Et l'on a

$$2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 5(x-1) + 1 = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3 ,$$

Cette équation a lieu quelque valeur qu'on donne à x.

S'il manque dans le polynome proposé quelque puissance de x, il faut la mettre en évidence, en lui donnant zéro pour coefficient.

Soit par exemple . . . . . $x^3 - 7x + 7$
Coefficiens donnés . . . . $1 + 0 - 7 + 7$
Sommes premieres . . . . $1 + 1 - 6 + 1$
Sommes secondes . . . . $1 + 2 - 4$
Sommes troisiemes . . . $1 + 3$
Sommes quatriemes . . . 1

on a donc

$$x^3 - 7x + 7 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 4(x-1) + 1$$

21 Il est évident qu'une équation dont le premier membre est égal à zéro, offre précisément le même cas que polynome de la proposition précédente. ainsi l'algorithme par lequel on obtient la transformée en $(x-1)$ d'une équation donnée en x, consiste dans le même procédé employé pour la transformation d'un polynome d'une valeur quelconque.

Etant donc donnée l'équation.

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

les coefficiens de la transformée en $(x-1)$ sont . . .

$$1 + 3 - 4 + 1$$

Pareillement pour l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

les coefficiens de la transformée en $(x-1)$, sont :

$$1 + 3 + 1 - 6$$

22. Par le même algorithme, on passera de la transformée en $(x-1)$ à celle en $(x-2)$; de celle-ci à la transformée en $(x-3)$; et ainsi de suite indéfiniment.

on obtiendra donc très promptement les coefficiens de ces diverses équations.

Coefficiens des équations dans le 1er exemple du N°. 21.

En x .... $1+0-7+7$
En $(x-1)$ .... $1+3-4+1$
En $(x-2)$ .... $1+6+5+1$
En $(x-3)$ .... $1+9+20+13$
&c. &c.

Coefficiens des équations, dans le second exemple.

En x .... $1+0-2-3$
En $(x-1)$ .... $1+3+1-6$
En $(x-2)$ .... $1+6+10-1$
En $(x-3)$ .... $1+9+25+16$
&c. &c.

23. Il est aisé d'observer que par ces transformations, on finit par avoir des coefficiens qui sont tous de même signe.

Observons aussi que si l'équation proposée n'est que du 3^e degré, on peut obtenir les coefficiens de ses transformées successives par un moyen encore plus rapide que l'algorithme général. Nos lecteurs le devineront sans peine à la simple inspection des coefficiens représentés dans le N.° précédent. Dans ce cas, le calcul des transformées s'opère instantanément, sans avoir besoin d'écrire d'autres chiffres que ceux qu'on voit ici. (note a! pag. 73.)

24. Le même algorithme fournit le moyen d'obtenir les transformées en $(x-10)$, $(x-20)$, $(x-30)$, &c; celles en $(x-100)$ $(x-200)$, $(x-300)$, &c: &c.

Il faut pour cela, substituer dans la proposée une inconnue x' qui soit, respectivement, dix fois, cent fois, &c. moindre que x. Les coefficiens de cette équation en x' s'obtiennent, comme l'on sait, par le déplacement convenable de la virgule qui indique les décimales.

On se procure ensuite les transformées en $(x'-1)$, $(x'-2)$, $(x'-3)$

$(x'-4)$, &c ou ce qui revient au même, en $\left(\frac{x-10}{10}\right)$, $\left(\frac{x-20}{20}\right)$, $\left(\frac{x-30}{30}\right)$ &c, ou bien en $\left(\frac{x-100}{100}\right)$, $\left(\frac{x-200}{200}\right)$, $\left(\frac{x-300}{300}\right)$; selon qu'on a fait $x'=\frac{x}{10}$, ou $x'=\frac{x}{100}$, &c.

Il ne s'agit plus que de rendre les inconnues de ces transformées respectivement, dix ou cent fois, &c. aussi grandes; ce qui s'opère par le déplacement convenable de la virgule dans leurs coefficiens.

Soit, par exemple, l'équation.

$$x^3-4x^2+3x-6=0$$

dont on demande les transformées en $(x-10)$, $(x-20)$. &c.

on fera $x=10x'$; d'où ...

$$x'^3-0{,}4x'^2+0{,}03x^2-0{,}006=0$$

Coefficiens des équations,

En x' .... $1-0{,}4+0{,}03-0{,}006$
en $\left(\frac{x-10}{10}\right)$ ou $(x'-1)$ ..... $1+2{,}6+2{,}23+0{,}624$
en $\left(\frac{x-20}{20}\right)$ ou $(x'-2)$ .... $1+5{,}6+10{,}43+6{,}454$
&c. &c.

Et par conséquent on aura, pour les coefficiens des équations

en $(x-10)$ .... $1+26+223+624$
En $(x-20)$ .... $1+56+1043+6454$
&c. &c.

On voit aisément comment par une marche analogue, on se procureroit les transformées en $\left(x-\frac{1}{10}\right)$, $\left(x-\frac{2}{10}\right)$ &c; en celles en $\left(x-\frac{1}{100}\right)$, $\left(x-\frac{2}{100}\right)$, &c.; &c. (note b! pag. 74.)

25. Si l'on veut avoir l'équation où l'inconnue de la proposée est diminuée d'un nombre de plusieurs chiffres, par exemple, l'équation en $(x-312)$; on se procurera d'abord l'équation en $(x'-3)$, en faisant $x=100x'$; et par suite celle en $(x-300)$ comme il vient d'être indiqué.

Puis on fera $x - 300 = 10x''$, on obtiendra l'Équation en $(x''-1)$; en par suite, celle en $(x - 310)$; de cette dernière on passera à celle en $(x - 311)$; et de celle-ci à l'équation demandée en $(x - 312)$.

Voici, par exemple, la marche qu'il faudrait suivre si la proposée était.
$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0$$
Soit $x = 100x'$; d'où
$$x'^3 - 0{,}04x'^2 + 0{,}0003x' - 0{,}000006 = 0$$
Coefficiens des équations ...

En x' ..... $1 - 0{,}04 + 0{,}0003 - 0{,}000006$

En $(x'-1)$ ..... $1 + 2{,}96 + 2{,}9203 + 0{,}960294$

En $(x'-2)$ ..... $1 + 5{,}96 + 11{,}8403 + 7{,}840594$

en $(x'-3)$ ..... $1 + 8{,}96 + 26{,}7603 + 26{,}640894$

Ainsi les coefficiens de l'Équation en $(x - 300)$ sont.
$$1 + 896 + 267603 + 26640894$$
faisant ensuite $x - 300 = 10x''$, on a les coefficiens des équations

En x'' ..... $1 + 89{,}6 + 2676{,}03 + 26640{,}894$

En $(x''-1)$ ..... $1 + 92{,}6 + 2858{,}23 + 29407{,}524$

or $(x''-1) = \frac{x-310}{10}$ Il s'ensuit donc qu'on aura les coefficiens des équations

En $(x - 310)$ ... $1 + 926 + 285823 + 29407524$

En $(x - 311)$ ... $1 + 929 + 287678 + 29694274$

En $(x - 312)$ ... $1 + 932 + 289539 + 29982882$.

Il est aisé de voir comment on obtiendrait l'Équation où l'inconnue de la proposée serait diminuée d'un nombre décimal de plusieurs chiffres; par exemple l'Équation en $(x - \frac{312}{100})$. nous ne nous arrêterons point à ces détails.

26. En considérant le tableau des opérations par lesquelles on passe d'un polynome en x à son équivalent en $(x-1)$ (20), on n'aura pas de peine à reconnaître comment on peut passer réciproquement d'un polynome en $(x-1)$ à son équivalent en x. Et par conséquent, de celui en x à son équivalent en $(x+1)$, et ainsi de suite; Dans le premier cas on a pris des Sommes dans le second on prend des Différences.

Choisissons, pour exemple, le polynome en x du N.º 20 dont les coefficiens sont..
$$2 - 3 + 5 - 3$$
Et son équivalent en $(x-1)$, qui a pour coefficiens
$$2 + 3 + 5 + 1$$
Pour passer de celui-ci à l'autre, on écrit ses coefficiens, et on procède comme il suit:

Coefficiens du Polynome en $(x-1)$ ..... $2 + 3 + 5 + 1$

Suites dans chacune desquelles le $n^{\text{ème}}$ terme est la différence du terme qui le précède au terme $n^{\text{ème}}$ de la suite supérieure.
1.re ... $2 + 1 + 4 - 3$
2.e ... $2 - 1 + 5$
3.e ... $2 - 3$
4.e ... 2.

On obtient ~~aussi~~ ainsi les coefficiens du polynome en x, et l'on se procurera de la même manière ceux du polynome en $(x+1)$. En voici le tableau.

Coefficiens du Polynome en x ..... $2 - 3 + 5 - 3$

Suites des différences prises suivant la loi qui vient d'être indiquée ....
1.re ... $2 - 5 + 10 - 13$
2.e ... $2 - 7 + 17$
3.e ... $2 - 9$
4.e ... 2.

Les coefficiens obtenus pour le polynome en $(x+1)$ sont
$$2 - 9 + 17 - 13$$
Ce qu'il est aisé de vérifier par le procédé inverse.

27. On a remarqué ci-dessus qu'en opérant les transformations

successives en $(x-1)$, $(x-2)$, &c. on parvenait à une transformée en $(x-a)$ dont tous les termes sont de même signe, de l'on observera que les transformations en $(x+1)$, $(x+2)$ &c. conduisent à une transformée en $(x+a')$, dont les termes ne présentent que des variations de signes, comme on le remarque dans le polynome en $(x+1)$ du dernier exemple, dont les coefficiens sont alternativement précédés du signe + et du signe −. Lorsqu'on est une fois parvenu à ce polynome en $(x+a')$ les transformées ultérieures en $(x+a'+1)$, $(x+a'+2)$ &c. n'offriront plus aucune permanence de signe: cela s'aperçoit par la nature même du procédé.

Les équations du 3e degré sont susceptibles d'une abréviation, analogue à celle qui est indiquée au N° 23.

Chapitre 3.

Diverses notions fournies par l'algèbre concernant les équations numériques.

28. On peut toujours transporter dans un même membre tous les termes d'une équation, en sorte qu'elle paraisse sous cette forme.

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x^1 + A_m x^0 = 0$$

m étant un nombre entier positif; les coefficiens ayant par eux-mêmes une valeur positive ou négative, et quelques uns pouvant aussi être nuls. C'est sous cette forme que nous considérerons toujours les équations.

Le but principal qu'on se propose dans la résolution d'une équation déterminée, est de trouver exactement ou par approximation, s'il y a lieu, tous les nombres réels, dont la

substitution, à la place de l'inconnue, rend nulle la somme de tous les termes du premier membre. On donne à ces nombres le nom de racines réelles de l'équation: elles sont ou positives ou négatives.

29. Le nombre des racines réelles d'une équation ne peut jamais surpasser m, c'est-à-dire, le nombre qui en indique le degré; il peut lui être inférieur, ou même être nul. L'excès de m sur le nombre des racines réelles est nécessairement un nombre pair, indicateur du nombre des racines imaginaires qui satisfont à l'équation.

On entend par quantités imaginaires, le symbole d'un résultat d'opérations, impossible à obtenir, à raison de son absurdité: par exemple, la racine quarrée d'une quantité négative telle que $\sqrt{-4}$.

Toute racine ou quantité imaginaire se peut réduire à l'une de ces formes $\pm A + \sqrt{-B}$ et $\pm A - \sqrt{-B}$, A et B étant des quantités réelles; si une équation a une de ses racines sous une de ces formes, elle en a nécessairement une sous l'autre; les racines imaginaires se trouvent ainsi toujours unies par couples.

30. Toute équation qui a pour racine un nombre $\pm n$, est divisible par le facteur $x \pm n$, celle qui a une couple de racines imaginaires, est divisible par le facteur réel du second degré $x^2 \mp 2Ax + A^2 + B$.

Généralement une équation du degré m est le produit de m facteurs simples, soit réels, soit imaginaires: le nombre des facteurs simples réels est égal à celui des racines réelles de l'équation.

31. Lorsque, par la substitution d'un nombre n à la place de x, la somme de tous les termes de l'équation est rendue égale à une quantité positive; et que la substitution d'un

autre nombre n' donne au contraire un résultat négatif, on est assuré qu'il y a une ou plusieurs racines en nombres impairs, dont la valeur est comprise entre n et n', & réciproquement. (algèbre de Lacroix 211).

Mais la substitution ne donne point de résultats de signes contraires, lorsque les racines comprises entre n et n' sont en nombre pair. (algeb

La substitution de quelque nombre que ce soit ne donne que des résultats positifs, lorsque l'équation n'a que des racines imaginaires.

32. Quand on change, dans une équation, le signe des termes du rang pair, ou de ceux du rang impair, les racines de l'équation après ce changement, sont les mêmes qu'avant, au signe près; c'est-à-dire que les racines négatives deviennent positives, et que les positives deviennent négatives.

Il s'ensuit que pour savoir trouver toutes les racines réelles d'une équation, il suffit de savoir trouver les racines positives.

33. Toute équation de degré impair a pour le moins, une racine réelle positive, si son dernier terme est négatif; ou une racine réelle négative, si ce dernier terme est positif, (al. L. 213.

Dans les équations de degré pair, il y a toujours, pour le moins une racine réelle positive et une autre négative, si le dernier terme est négatif; mais si ce terme est positif, on n'en peut rien conclure pour la réalité des racines. (214.)

34. Le résultat de la substitution d'un nombre $\pm n$, à la place de x, dans une équation donnée, est égal au terme tout connu de la transformée en $(x \mp n)$. Par conséquent $\pm n$ est une racine de la proposée, lorsque le dernier terme de la transformée en $(x \mp n)$ est égal à zéro. En généralement, la proposée a autant de racines égales à $\pm n$ qu'il y a, dans cette transformée de termes consécutifs, à commencer par

le dernier, qui égalent zéro.

35. La somme du coefficient du premier terme d'une équation et du plus grand coefficient de signe contraire étant prise sans qu'on ait aucun égard aux signes, et divisée par le premier coefficient, le quotient est plus grand que la plus grande racine positive qui puisse appartenir à l'équation; et ce quotient s'appelle une limite de cette plus grande racine.

Si le coefficient du premier terme de l'équation est +1, le plus grand coefficient négatif pris positivement et augmenté de l'unité, est une limite de la plus grande racine positive. (216)

On a, pour obtenir une limite plus approchée de la plus grande racine positive, divers moyens qu'il est inutile de rapporter ici. Observons seulement qu'on peut souvent y parvenir en faisant $x = 10x'$, ou $x = 100x'$, &c. l'équation en x' pouvant indiquer une limite de la plus grande valeur de x', qui decuplée ou centuplée, &c. donne pour x une nouvelle limite beaucoup plus rapprochée.

Exemple. Équation en x ... $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 451 = 0$

Équation en x' - - - - $x'^4 + 0,2x'^3 + 0,03x'^2 - 0,0451 = 0$

La limite en plus de x' étant 1,0451, celle de x est 10,451; et cette dernière est bien plus resserrée que 452, limite indiquée par le plus grand coefficient négatif de l'équation en x. Cette limite plus resserrée peut se reconnaître à la seule vue de la proposée, par une simple opération mentale.

Le terme tout connu de l'équation étant divisé par la somme de ce terme et du plus grand coefficient de signe contraire, prise sans égard pour les signes, le quotient est plus petit que la plus petite racine positive que l'équation puisse avoir; il en est une limite.

36. L'algèbre fournit le moyen de préparer une équation, de manière que son premier terme n'ait d'autre coefficient que l'unité, et que les autres coefficiens soient tous des nombres entiers. Il en résulte que les équations à résoudre peuvent toutes être considérées comme ramenées à cette forme.

L'équation ainsi préparée ne peut avoir pour racines réelles que des nombres entiers ou des nombres fractionnaires irrationnels. En général, ces racines irrationnelles ne sont susceptibles d'être déterminées que par approximation.

37. L'algèbre donne aussi le moyen de débarasser une équation des racines égales qu'elle peut avoir, en sorte que les racines multiples n'y subsistent plus que comme racines simples. ainsi les équations à résoudre peuvent être considérées comme n'ayant que des racines inégales.

38. Une équation ne peut avoir plus de racines réelles positives qu'il n'y a de variations dans la succession des signes de ses coëfficiens; ni plus de racines réelles négatives, qu'il ne s'y trouve de permanences de signes: c'est la fameuse règle de Descartes.

Ainsi, dans le cas où toutes les racines de l'équation sont réelles, il y a précisément autant de racines positives que de variations de signes, et autant de racines négatives que de permanences.

Quand un des coëfficiens de l'équation est zéro, et que les coëfficiens du terme précédent, et du suivant sont de même signe, l'équation a nécessairement des racines imaginaires.

On peut reconnaître si une équation a toutes ses racines réelles ou non, au moyen de l'équation dont les racines sont les quarrés des différences des racines de la proposée. Dans le premier cas, cette équation aux quarrés des différences n'a que

des variations de signes; tandis qu'elle a nécessairement des permanences, si la proposée a des racines imaginaires. Mais le calcul des coëfficiens de cette équation est en général tellement pénible, qu'on n'est guères tenté d'employer ce moyen.

39. On peut déduire de la règle de Descartes les deux propositions suivantes.

1º. Une équation en x, dont toutes les racines sont réelles, a autant de racines comprises entre zéro et p, qu'il y a de permanences de signe dans la transformée en ~~x et~~ $(x-p)$ de plus que dans l'équation en x.

2º. Une équation de cette espèce ne peut avoir, soit une, soit deux, soit n racines comprises entre zéro et p, si la transformée en $(x-p)$ n'a pas, respectivement, une, ou deux, ou n permanences de signe, de plus que l'équation en x.

Nous avons même de fortes raisons de croire que la seconde proposition est applicable à une équation quelconque.

Chapitre 4.

Exposition de la nouvelle Méthode.

Première partie. Cas où l'on n'a besoin que de cette partie de la Méthode.

(40.) Nous allons maintenant exposer successivement les divers procédés qui constituent notre méthode, en renvoyant aux Nº du chapitre précédent, où sont contenus les principes qui servent de base aux résultats que l'on obtient par ces procédés. Pour concevoir le rapport des uns aux autres, il suffit au lecteur qui ne serait point assez avancé dans l'algèbre, de tenir les principes pour démontrés, sans chercher à en connaître la démonstration; et s'il ne veut que posséder le méchanisme de la méthode, il n'a besoin que de savoir opérer les transformations, conformément à l'algorithme du second chapitre.

41. Étant donc donné une équation en $\underline{x}$ du degré $\underline{m}$, on se procurera les transformées successives en $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une transformée en $(x-u)$, dont les coefficients soient tous de même signe.

Cette dernière transformée ne pouvant point avoir de racine positive, le nombre entier $\underline{u}$ est une limite de la plus grande valeur positive de l'inconnue.

S'il arrive que la proposée elle-même n'offre que des permanences de signe, il ne reste à chercher que les racines négatives qu'elle peut avoir, et on procédera comme il sera dit plus bas (44)

42. Lorsque le dernier coefficient d'une équation qui a pour inconnue $(x-p)$, est égal à zéro, l'équation en x a une racine égale au nombre p; et plus généralement, si $\underline{n}$ coefficients consécutifs de la transformée, à compter du dernier, sont égaux chacun à zéro, la proposée a n racines égales, chacune à p (34) Par cette circonstance l'équation en $(x-p)$ se trouve abaissée de $\underline{n}$ degrés.

A raison de cet abaissement, il peut y avoir quelque avantage à ne débarrasser l'équation de ses racines égales, qu'après avoir opéré les transformations du N° 41.

43. Lorsque le dernier coefficient d'une équation en $(x-p)$ est de signe contraire à celui de la transformée en $(x-p-1)$, la proposée a une ou plusieurs racines en nombre impair, dont la valeur est comprise entre p et $p+1$. Car les coefficients dont il s'agit, expriment précisément les résultats que donnent la proposée, quand on y met successivement p et $p+1$ à la place de x (31.).

44. Les racines négatives de la proposée étant, au signe près, égales aux racines positives qu'aurait cette équation si les signes de ses termes pairs étaient tous changés, on fera ce changement, puis on opérera comme ci-dessus (41) et on obtiendra des résultats analogues.

45. Par cette première partie de la méthode on trouve en certains cas, toutes les racines réelles de l'équation, soit exactement, soit approximativement, à moins d'une unité près.

Un premier cas est celui où la proposée n'a ni racines imaginaires, ni plusieurs racines réelles comprises entre deux nombres entiers p et $p+1$.

Un second cas est celui où l'on sait d'avance que toutes les racines de la proposée sont réelles, encore que parmi ces racines, il y en ait d'incommensurables comprises, en tel nombre que ce soit, entre deux nombres entiers consécutifs.

Un troisième cas a lieu, lorsqu'on sait que l'équation n'a qu'une racine réelle, positive ou négative, ou bien qu'elle en a deux, l'une positive et l'autre négative, ainsi qu'il arrive dans les équations de cette forme. $x^m \mp A = 0$.

46. *Premier Exemple*. Soit l'Équation

$$x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27 = 0$$

Coefficients des équations.

En x . . . . . $1 - 10 + 36 - 54 + 27$

En $x-1$ . . . . . $1 - 6 + 12 - 8 + 0$

En $x-2$ . . . . $1 - 3 + 3 - 1$

En $x-3$ . . . $1 + 0 + 0 + 0$

Les racines de cette Équation sont donc 1 et 3, cette dernière racine est triple (42.) c'est-à-dire que la proposée est divisible par $(x-3)^3$.

Second exemple. $x^3-5x^2+x+7=0$

Coefficiens des équations

En x	$1-5+1+7$
En $(x-1)$	$1-2-6+1$
En $(x-2)$ ...	$1+1-7-6$
En $(x-3)$ ...	$1+4-2-11$.
En $(x-4)$ ...	$1+7+9-8$
En $(x-5)$ ...	$1+10+26+9$

La proposée a donc deux racines positives incommensurables, dont les valeurs sont respectivement comprises entre 1 & 2, et entre 4 et 5. Pour avoir ensuite la racine négative on change les signes des termes de rang pair dans la proposée (44.) et on a.

$$x^3+5x^2+x-7=0.$$

Coefficiens des équations.

En $x=-x$	$1+5+1-7$
En $(x-1)$	$1+8+14+0$

donc la racine négative de la proposée est -1.

Troisième exemple. $x^3-7x+7=0$

Coefficiens des équations,

En x	$1+0-7+7$
En $(x-1)$ ...	$1+3-4+1$
En $(x-2)$ ...	$1+6+5+1$

Coefficiens des équations.

En $x=-x$	$1-0-7-7$
En $(x-1)$	$1+3-4-13$
En $(x-2)$	$1+6+5-13$
En $(x-3)$	$1+9+14-1$
En $(x-4)$	$1+12+35+23$.

L'Equation proposée étant de celles qu'on sait savoir toutes les racines réelles, il en résulte que non seulement elle a une racine négative dont la valeur est entre -3 et -4 (43.) mais aussi qu'elle a deux racines positives comprises entre 1 et 2, parceque la transformée en $(x-2)$ a deux permanences de signe de plus que celle ~~qui~~ en $(x-1)$ (39). Telle est, dans ce cas la conséquence de la règle de Descartes.

Quatrième exemple. $x^3-1745=0$

Coefficiens des équations,

En x	$1+0+0-1745$
En $(x-1)$	$1+3+3-1744$
En $(x-2)$ ...	$1+6+12-1737$
En $(x-3)$	$1+9+27-1718$
En $(x-4)$ ...	$1+12+48-1681$
En $(x-5)$ ...	$1+15+75-1620$
En $(x-6)$ ...	$1+18+108-1529$
En $(x-7)$ ...	$1+21+147-1402$
En $(x-8)$ ...	$1+24+192-1233$
En $(x-9)$ ...	$1+27+243-1016$
En $(x-10)$ ...	$1+30+300-745$
En $(x-11)$ ...	$1+33+363-414$
En $(x-12)$ ...	$1+36+432-17$
En $(x+13)$ ...	$1+39+507+452$.

Donc la racine de l'Equation est entre 12 et 13.

(47.) Nous avons suivi dans ce dernier exemple la marche la plus longue; car il est aisé de voir que x devant un nombre entier, exprimé par deux chiffres, on pouvait d'abord se procurer les transformées en $(x-10)$, $(x-20)$, &c. par le procédé indiqué plus haut (24.) en faisant d'abord $x=10x'$, ce qui changeait l'Equation en $x'^3-1{,}745=0$.

Coefficiens des équations.

En x' ...... $1 + 0 + 0 - 1,745$

En $\left(\frac{x-10}{10}\right)$ ou $(x'-1)$ .. $1 + 3 + 3 - 0,745$

En $\left(\frac{x-20}{20}\right)$ ou $(x'-2)$ .. $1 + 6 + 12 + 6,255$

Et par conséquent

En $(x-10)$ ... $1 + 30 + 300 - 745$

En $(x-20)$ ... $1 + 60 + 1200 + 6255$.

Donc la racine est entre 10 & 20. Il ne reste qu'à se procurer les transformées successives après celle en $(x-10)$ jusqu'à celle en $(x-19)$ tout au plus.

Coefficiens des équations.

En $(x-10)$ ... $1 + 30 + 300 - 745$

En $(x-11)$ ... $1 + 33 + 363 - 414$

En $(x-12)$ ... $1 + 36 + 432 - 17$

En $(x-13)$ ... $1 + 39 + 507 + 452$.

Et on conclura comme plus haut que la racine 3e ou cubique de 1745 est entre 12 et 13.

La nouvelle méthode offre donc un moyen d'extraire, par des additions et des soustractions, la racine $m^{ème}$, exacte ou approchée, d'un nombre quelconque. Si l'on veut comparer cette méthode avec les anciens procédés, nous laissons à juger lequel des deux mérite la préférence.

48. Le procédé que nous avons employé dans le No précédent n'est pas applicable seulement aux équations à deux termes; on peut aussi l'employer dans une équation quelconque, toutes les fois qu'on aura sujet de penser, d'après l'examen des coefficiens de la proposée, que le plus grand nombre entier, faisant partie de la plus grande racine positive, peut être exprimé par plusieurs chiffres. Dans ce cas, il pourra être plus convenable

de faire $x = 10x'$, ou $x = 100x'$, &c. et de se procurer d'abord les transformées en $(x-10)$, $(x-20)$ &c.; ou en $(x-100)$, $(x-200)$ &c.; &c. ou bien encore, de résoudre l'équation en x' à l'aide des transformées successives $(x'-1)$, $(x'-2)$, &c.; puis d'en déduire les valeurs de x.

Ces remarques détruiront sans doute cette objection que l'irréflexion pourrait opposer à notre méthode; savoir, « que si les » racines étaient exprimées en nombres un peu grands, la mé» thode serait impraticable par sa longueur, et qu'on aurait » beaucoup plutôt fait de chercher les mêmes choses par les » méthodes ordinaires.

On peut se rassurer contre cette prétendue longueur, puisque le nombre des transformées successives exigées par cette méthode, si faciles d'ailleurs à obtenir par notre algorithme, est égal au nombre des chiffres qu'on peut avoir à la racine, plus la somme de ces mêmes chiffres considérés comme n'exprimant chacun que des unités simples. Par exemple pour avoir le nombre 812, le nombre des transformées serait $3 + 8 + 1 + 2 = 14$.

49. Veut-on maintenant avoir, dans les cas précédens, les racines plus approchées, à telle unité décimale près qu'il plaira, on peut employer la méthode d'approximation qui sera exposée ci-après Chapitre 6.

Chapitre. 5.

Suite de l'exposition de la nouvelle méthode. Seconde partie. Cas où cette partie, jointe à la première, suffit pour faire découvrir les limites de toutes les racines réelles d'une équation.

50. Les cas mentionnés dans le chapitre précédent ne sont pas les plus nombreux. Tantôt l'équation à résoudre n'a que des

racines imaginaires ; tantôt les racines sont toutes réelles, mais on l'ignore, et plusieurs d'entre elles ayant pour limites les mêmes nombres entiers p et $p+1$, on ne peut les découvrir toutes par les seules transformées en $(x-1)$, $(x-2)$ &c ; d'autres fois quelques unes des racines sont réelles, en d'autres sont imaginaires, sans qu'on le sache ou qu'on soit instruit du nombre des unes & des autres. Dans ces diverses circonstances, on aura recours à des transformées collatérales, en la manière qui va être expliquée.

§1. Il faut d'abord observer que la résolution des équations se réduisant à la recherche des racines positives (32.), cette recherche se réduit elle-même à celle des racines positives d'une équation quelconque peut avoir au-dessous de l'unité. Ceci est une conséquence des transformations successives ; car il est évident que pour connaître toutes les racines positives ~~qu'a~~ de l'équation ~~quelconque peut avoir au-dessous de l'unité~~ en x, il suffit de connaître respectivement les racines positives inférieures à l'unité 1° de la proposée 2° de la transformée en $(x-1)$; 3° de celle en $(x-2)$; et ainsi de suite ; jusqu'à la dernière transformée qui conserve quelque variation de signe. On voit en effet que pour découvrir que la proposée peut avoir entre p et $p+1$, il ne s'agit que de trouver dans l'équation en $(x-p)$, les valeurs de l'inconnue $(x-p)$ comprises entre 0 & 1. Tel est donc le problème dont il faut obtenir généralement la solution : Étant donnée une équation qui n'a point de racines égales, s'assurer si elle a, ou si elle n'a pas des racines comprises entre 0 & 1.

§2. Lorsqu'on ignore si l'équation proposée a toutes ses racines réelles, l'examen de la succession des signes ne fournit plus un indice certain de l'existence des racines qui peuvent être comprises entre p et $p+1$. Si l'équation en $(x-p-1)$ a des permanences de signe de plus que l'équation en $(x-p)$ le signe du dernier terme dans chacune de ces équations étant

le même, on peut seulement soupçonner qu'il y a des valeurs de $(x-p)$ entre zéro et un, et par conséquent des valeurs de x entre p et $p+1$; mais ce soupçon reste à vérifier.

D'une autre part, si la seconde proposition mentionnée au n° 39 était admise comme principe général pour une équation quelconque, ce principe fournirait un motif constant d'exclusion contre toute valeur qu'on voudrait attribuer à $(x-p)$ entre zéro et un, toutes les fois que l'équation en $(x-p-1)$ n'a pas plus de permanences de signe que l'équation en $(x-p)$. Dès lors on déterminerait sur-le-champ, au moyen des exclusions qu'on serait autorisé à prononcer, les seuls nombres entiers parmi lesquels on doit chercher ceux qui sont, à moins d'une unité près, les racines de l'équation proposée. Comme on n'apporterait point ici de preuves de la généralité de ce principe, nous allons recourir à un autre motif de rejet.

§3. Soit par exemple cette équation

$$x^3-4x^2+3x-6=0$$

L'équation inverse en z ou $\frac{1}{x}$ est, comme l'on sait, celle dont les coefficients sont les mêmes que ceux de l'équation en x, mais en ordre inverse.

$$6z^3-3z^2+4z-1=0$$

La transformée en $(z-1)$ est.

$$6(z-1)^3+15(z-1)^2+16(z-1)+6=0$$

Cette transformée n'ayant que des permanences de signe offre un indice ou <u>Critérium</u> certain de l'absence de toute racine réelle entre zéro et un, dans l'équation en x.
<u>Généralement l'équation en x ne peut avoir plus de racines entre 0 et 1, que la transformée en $(z-1)$ ou $(\frac{1}{x}-1)$</u>

<u>n'a de variations de signe.</u>

Enfin l'équation en $(z-1)$ a son dernier terme négatif, celle en $\underline{x}$ a, pour le moins, une racine reelle entre zéro et un.

54. Appliquons ce <u>Criterium</u> à l'equation,

$$x^3-2x-3=0$$

Enfaisons $\frac{1}{x}=z$, $\frac{1}{x-1}=z_1$, $\frac{1}{x-2}=z_2$ et ainsi de suite

Coefficiens des équations.

En x ..... $1+0-2-5$ ... en $(z-1)$ ... $5+17+17+6$
En $(x-1)$.... $1+3+1-6$ ... En (z_1-1) ... $6+17+13+1$
En $(x-2)$ ... $1+6+10-1$ ... En (z_2-1) ... $1-7-23-16$
en $(x-3)$ ... $1+9+25+16$

Et pour la recherche des racines négatives soit $x=-X$, $\frac{1}{X}=z$, &c.
Coefficiens des Equations.

En X .... $1-0-2+3$ .. En $(z-1)$ ... $5+13+11+4$
En $(X-1)$ ... $1+3+1+4$

Ces transformations collaterales suffisent, comme l'on voit, pour la résolution approximative de l'équation, à moins d'une unité près; elles donnent l'exclusion à tous nombre négatif; et elles excluent en même temps tous nombre positif, excepté le nombre 2, lequel est admis pour le plus grand nombre entier compris dans la racine, par le double motif que le dernier terme de l'équation en $(x-3)$ est de signe contraire à celui de l'équation en $(x-2)$, et que le dernier terme de l'équation collatérale en (z_2-1) est négatif, ces deux motifs coincident toujours ensemble.

55. Ces transformations suffisent aussi pour déterminer à moins d'une unité près, les racines réelles d'une équation toutes les fois qu'à chaque couple d'équations en $(x-p)$ et

$(x-p-1)$, dont les derniers termes respectifs sont de même signe, correspond une équation collatérale en (z_p-1) qui n'a que des permanences de signe.

Exemple. $x^4-12x^3+58x^2-132x+121=0$

Coefficiens des equations:

En x .... $1-12+58-132+121$ .. En $(z-1)$ ... $121+352+388+192+36$
En $(x-1)$ ... $1-8+28-48+36$ .. En (z_2-1) .. $36+96+100+48+9$
En $(x-2)$ .. $1-4+10-12+9$ ... En (z_3-1) .. $9+24+28+16+4$
En $(x-3)$ .. $1+0+4+0+4$ ... En (z_4-1) .. $4+16+28+24+9$
en $(x-4)$ .. $1+4+10+12+9$

Les transformées collaterales donnent ici l'exclusion à tous nombre positif, et la proposée n'ayant point de permanences de signe, par conséquent point de racine negative, il s'ensuit que toutes les racines sont imaginaires.

Autre Exemple. $x^4-5x^3+5x^2+6-12=0$

Coefficiens des Equations.

En x .... $1-5+5+6-12$ .. En $(z-1)$ .. $12+42+49+25+5$
En $(x-1)$ ... $1-1-4+5-5$ ... En (z_1-1) ... $5+15+19+14+4$
En $(x-2)$ ... $1+3-2-2-4$ ... En (z_2-1) ... $4+18+32+23+4$
En $(x-3)$ ... $1+7+13+7-4$ ... En (z_2-1) ... $4+9+11-38-24$
En $(x-4)$ ... $1+11+40+58+32$

Puis on fait $x=-X$, $\frac{1}{X}=z$, &c.

Coefficiens des équations en

X ..... $1+5+5-6-12$ .. En $(z-1)$ ... $12+54+85+51+7$
$(X-1)$ ... $1+9+26+23-7$ .. En (z_1-1) ... $7+5-53-102-52$
$(X-2)$ ... $1+13+59+106+52$

D'après les transformées collatérales, on reconnait que les seules racines réelles de l'Equation sont 3 et -1 à moins d'une unité près.

56. L'uniformité des signes dans l'équation en (z_p-1) ne permettant pas d'attribuer aucune valeur à $(x-p)$ entre 0 et 1

on peut demander si la proposition inverse est également vraie; c'est-à-dire, si cette uniformité a toujours lieu, lorsque $x-p$ n'a aucune valeur positive inférieure à l'unité. Si cela était, on voit quel emploi des transformations collatérales ne fournirait pas seulement un motif certain d'exclusion contre des nombres qui n'appartiennent pas aux racines de l'équation proposée, mais qu'il ferait aussi connaître avec certitude les nombres entiers qui sont, à moins d'une unité près des racines de cette équation.

§7. Pour obtenir la réponse à cette demande, il faut considérer que si $x-p$ n'a pas de valeur entre zéro et un, alors l'équation en z_p ou $\frac{1}{x-p}$ n'ayant pas de valeur supérieure à l'unité la transformée en (z_p-1) ne peut avoir pour racines réelles que des racines négatives. Donc tous les facteurs réels simples que cette transformée peut avoir, sont de la forme z_p-1+A; et si ces facteurs ne sont associés qu'à des facteurs du second degré de la forme $(z_p-1)^2+P(z_p-1)+Q$, (A, P et Q étant positifs par eux-mêmes) il est évident que la transformée en (z_p-1) n'a pour lors aucune variation de signe. Or cette forme des facteurs du second degré a toujours lieu dans la transformée à l'exception d'un seul cas, savoir, celui où l'équation en $(x-p)$ a une ou plusieurs couples de racines imaginaires de la forme $+f\pm\sqrt{-\varphi}$ en sorte que f et φ étant l'un et l'autre moindres que l'unité on ait $\varphi < f(1-f)$ et par conséquent $\varphi < \frac{1}{4}$.

En effet lorsque

$$x-p = f\pm\sqrt{-\varphi},\quad z_p = \frac{1}{f\pm\sqrt{-\varphi}} = \frac{f\mp\sqrt{-\varphi}}{f^2+\varphi};$$

La $$z_p - 1 = \frac{f}{f^2+\varphi} - 1 \mp \frac{\sqrt{-\varphi}}{f^2+\varphi}$$

la partie réelle $\frac{f}{f^2+\varphi}-1$ ne peut être positive, à moins

que le dénominateur $f^2+\varphi$ ne soit plus petit que f; ce qui n'a lieu qu'autant que f et φ sont des fractions, et qu'on a $\varphi<f-f^2$, ou $\varphi<f(1-f)$; d'où il suit que φ est alors moindre que $\frac{1}{4}$ ou 0,25; vu que $\frac{1}{4}$ est, comme on sait, le plus grand produit que puisse donner une fraction par son complément à l'unité.

Ce cas est le seul qui, introduisant dans la transformée en (z_p-1) des facteurs de la forme $(z_p-1)^2-P(z_p-1)+Q$ pourrait y donner lieu à des variations de signe, et laisser subsister la présomption de l'existence des racines entre zéro et un dans l'équation en $(x-p)$.

§8. Ce cas d'exception s'évanouira nécessairement par l'effet des opérations ultérieures de notre méthode, comme on va le voir dans le chapitre suivant. Mais il suit dès-à-présent du N°. précédent, que la seconde partie de cette méthode fait connaître avec certitude tantôt l'absence de toute racine réelle dans l'équation en $(x-p)$ entre 0 et 1; tantôt l'alternative de l'existence de plusieurs racines entre zéro et 1, ou de celle d'un couple, au moins, de racines imaginaires, dont la partie réelle est une fraction proprement dite, tandis que la quantité précédée du signe − sous le signe radical, est moindre que 1/4 ou 0,25, de même que le produit de la partie réelle par son complément à l'unité.

Chapitre 6.

Fin de l'Exposition de la nouvelle Méthode. Troisième Partie.

(59). Lorsqu'on sait avec certitude que la proposée a une ou plusieurs racines comprises entre p et $p+1$, il reste à trouver une valeur exacte de ces racines jusqu'au $n^{\text{ème}}$ chiffre décimal; et quand on a lieu seulement de présumer leur existence, il reste à la vérification de ces racines douteuses. Un même procédé va remplir ce double objet ; c'est-à-dire, que la méthode d'approximation pour les racines déjà connues, sera en même temps une méthode de vérification et d'approximation pour celles qui ne sont pas soupçonnées.

60. Soit qu'on ait la certitude que l'équation en $(x-p)$ a quelque racine comprise entre zéro et un, soit qu'on se trouve seulement autorisé à le soupçonner, on fait $10(x-p)=x'$, autant $x-p$ a de valeurs entre 0 et 1, autant x' doit en avoir entre 0 et 10. Il faut donc au moyen des transformées en $(x'-1)$, $(x'-2)$, &c. jusqu'à celles en $(x'-10)$ tout au plus, chercher les racines que l'équation en x' a ou peut avoir entre 0 et 10.

On se comporte dans cette recherche comme dans celle des racines de l'équation en x ; et l'on parvient de cette manière, soit à trouver la première décimale des racines dont la partie exprimée en nombre entier p est déjà connue ; soit à reconnaître ou à vérifier, à moins d'un dixième près, l'existence des racines comprises entre p et $(p+1)$, qui jusque-là était douteuse, et qui cesse de l'être, parceque ces mêmes racines ne se trouvent point comprises ensemble entre $\left(p+\frac{p'}{10}\right)$ et $\left(p+\frac{p'+1}{10}\right)$ les différences de ces racines entr'elles pouvant d'ailleurs être indéfiniment moindres que $1/10$; soit encore à détruire la présomption occasionnée par des racines imaginaires $f\pm\sqrt{-\varphi}$ dans le cas où le criterium ou moyen d'exclusion mentionné dans la 2e partie (53) s'est trouvé en défaut (57)

61. On parvient, disons-nous, à détruire ce soupçon à l'aide des équations en $(x'-p')$ et en $(z'_{p'}-1)$, toutes les fois au moins que le centuple de la fraction φ est égal ou supérieur à $1/4$; ou ce qui revient au même, toutes les fois que on n'a pas $\varphi<\frac{1}{400}$ ou bien $\varphi<0,0025$.

Pour s'assurer de ceci, il ne faut que faire attention à l'équation $10(x-p)=x'$. Lorsqu'une valeur imaginaire de $(x-p)$ est $f\pm\sqrt{-\varphi}$, la valeur correspondante de x' est $10f\pm\sqrt{-100\varphi}$, et celle de $(x'-p')$ est $(10f-p')\pm\sqrt{-100\varphi}$, ou bien $f'\pm\sqrt{-100\varphi}$ si l'on fait $10f-p'=f'$ on raisonnera donc pour l'équation en $(z'_{p'}-1)$ comme on a fait ci-dessus pour celle en (z_p-1) (58.)

62. Ce qui précède va s'éclaircir par l'exemple suivant.

Soit à résoudre l'équation $X^3-51X^2+761X-2655=0$;

ou bien X étant égale à $10x$, soit proposée cette autre équation

$$x^3-5,1x^2+7,61x-2,655=0$$

l'équation n'ayant point de permanence de signe n'a point de racine réelle négative.

Coefficients des équations.

En x	$1-5,1+7,61-2,655$	En $(z-1)$	$2,655+0,355-2,155-0,855$
En $(x-1)$	$1-2,1+0,41+0,855$	En (z_1-1)	$0,855+2,975+1,285+0,165$
En $(x-2)$	$1+0,9-0,79+0,165$	En (z_2-1)	$0,165-0,295-0,185+1,275$
En $(x-3)$	$1+3,9+4,01+1,275$		

Donc zéro est admis comme racine approchée, à moins d'une unité près ; le nombre 1 est exclus ; le nombre 2 est à vérifier.

Pour l'approximation de la racine admise, soit $10x=x'$, $\frac{1}{x'}=z'$, &c.

Coefficients des équations.

En x'	$1-51+761-2655$
En $(x'-1)$	$1-48+662-1944$
En $(x'-2)$	$1-45+569-1329$
En $(x'-3)$	$1-42+482-804$
En $(x'-4)$	$1-39+401-363$
En $(x'-5)$	$1-36+326+0$

donc $x'=5$; d'où $x=0,5$.

N. B on voit que les équations collatérales en $(z'-1)$, (z'_1-1) &c sont inutiles dans cette circonstance, parceque la transformée en $(z-1)$ n'ayant qu'une variation de signe, il s'ensuit que x' ne peut avoir qu'une seule valeur entre zéro et 10, x n'en pouvant avoir qu'une entre 0 et 1 (53.)

Pour la vérification des racines douteuses soit.

$10(x-2)=\dot{x}'$, $\frac{1}{\dot{x}'}=\dot{z}'$; &c.

Coefficients des équations,

En $\dot{x}'$	$1+9-79+165$	En $(\dot{z}'-1)$	$165+416+346+96$
en $(\dot{x}'-1)$	$1+12-58+96$	En $(\dot{z}'_1-1)$	$96+320+184+51$
En $(\dot{x}'-2)$	$1+15-31+51$	En $(\dot{z}'_2-1)$	$51+122+106+36$
En $(\dot{x}'-3)$	$1+18+2+36$		

Donc $\dot{x}'$ n'a pas de valeur réelle positive, donc 2 est exclus, et l'équation est résolue

63. Autre exemple. $x^5-3x^4-3x^3+7x^2+8x+2=0$

Coefficiens des Equations, En.

$x \ldots 1 - 3 - 3 + 7 + 8 + 2$
$(x-1) \ldots 1 + 2 - 5 - 10 + 6 + 12$
$(x-2) \ldots 1 + 7 + 13 - 3 - 16 + 6$
$(x-3) \ldots 1 + 12 + 51 + 88 + 50 + 8$

En $(z-1) \ldots 2 + 18 + 59 + 86 + 54 + 12$
En $(z_1-1) \ldots 12 + 66 + 134 + 121 + 46 + 6$
En $(z_2-1) \ldots 6 + 14 - 7 - 32 - 10 + 1$

Coefficiens des équations

En $x = -x \ldots 1 + 3 - 3 - 7 + 8 - 2$ .. En $(Z-1) \ldots 2 + 2 - 5 - 4 + 2 + 0$
En $(x-1) \ldots 1 + 8 + 19 + 12 + 2 + 0$

Donc une des valeurs de x est -1, et les transformées collatérales ne permettent de soupçonner d'autres racines réelles qu'entre 2 & 3, et entre 0 et -1

Pour la vérification des racines douteuses positives, soit $10(x-2) = x'$, ou $x = 2 + \frac{x'}{10}$. on obtient l'Equation en x' par une addition convenable de zéros dans les coefficiens de l'equation en $(x-2)$

Coefficiens des equations.

en $x' \ldots 1 + 70 + 1300 - 3000 - 161000 + 600000$
en $(x'-1) \ldots 1 + 75 + 1590 + 1330 - 161815 + 438371$
En $(x'-2) \ldots 1 + 80 + 1900 + 6560 - 154080 + 279552$
En $(x'-3) \ldots 1 + 85 + 2230 + 12720 - 134935 + 134013$
En $(x'-4) \ldots 1 + 90 + 2580 + 19960 - 102400 + 14145$
En $(x'-5) \ldots 1 + 95 + 2950 + 28250 - 54375 - 65625$
En $(x'-6) \ldots 1 + 100 + 3340 + 37680 + 11360 - 88704$
En $(x'-7) \ldots 1 + 105 + 3750 + 48310 + 97145 - 36223$
En $(x'-8) \ldots 1 + 110 + 4180 + 60200 + 205440 + 113088$

Donc x' a deux valeurs, l'une entre 4 et 5, et l'autre entre 7 et 8, et par conséquent les racines positives de x sont à moins d'un dixième près, 2,4 et 2,7.

NB. L'Equation en (z_2-1) ou $(\frac{1}{x-2}-1)$ n'ayant que deux variations de signe, ne peut avoir que deux racines positives (53) et par conséquent $(x-2)$ ne peut avoir plus de deux valeurs entre 0 et 1, ni x' plus de deux valeurs entre 0 et 10 : les transformées successives faisant connaître ces deux valeurs, il est inutile de calculer les collatérales.

Pour la vérification des racines négatives qui peuvent être comprises entre 0 et 1, on fera $10X = X'$, et par les transformées successives

en $(X'-1)$, $(X'-2)$, &c. on trouvera deux valeurs pour x', comprises respectivement entre 4 et 5, et entre 7 et 8. D'où il suit que les racines négatives de x sont $-0,4$, et $-0,7$ à moins d'un 10^e près.

64. Les équations en $(x'-p')$ et en $(z'_{p'}-1)$ peuvent n'être pas suffisantes pour déterminer l'admission ou le rejet de la totalité des racines douteuses, alors on a recours aux équations en $(x''-p'')$ et en $(z''_{p''}-1)$ qu'on obtient en faisant $10(x'-p') = x''$, $\frac{1}{x''-p''} = z''_{p''}$, et en procédant comme on a fait ci-dessus pour les equations en $(x'-p')$ et en $(z'_{p'}-1)$.

Par ce moyen on approche jusqu'à la seconde décimale inclusivement, des racines dont l'existence est déjà reconnue, en même temps que l'on découvre les racines réelles jusque-là douteuses, qui étant comprises entre $(p + \frac{p'}{10})$ et $(p + \frac{p'+1}{10})$ n'ont point pour communes limites $(p + \frac{p'}{10} + \frac{p''}{100})$ et $(p + \frac{p'}{10} + \frac{p''+1}{100})$ les différences de ces racines entr'elles pouvant d'ailleurs être indéfiniment moindres que $\frac{1}{100}$.

on détruit aussi par ce même moyen, le soupçon qui aurait été maintenu dans l'Equation en $(x'-p)$ par les imaginaires $f' \pm \sqrt{-100\varphi}$, toutes les fois, pour le moins, que $10000\,\varphi$ n'est pas égal ou supérieur à $\frac{1}{4}$; ou ce qui revient au même, toutes les fois qu'on n'a point $\varphi < \frac{1}{40000}$ ou bien $\varphi < 0{,}000025$. Les raisonnemens sont ici les mêmes qu'aux No. 58 et 61.

65. S'il reste encore à vérifier les racines présumées, ou si l'on veut pousser l'exactitude des racines découvertes jusqu'à la troisième décimale inclusivement, on voit comment la vérification et l'approximation se continueront par les équations en $(x'''-p''')$ et en $(z'''_{p'''}-1)$ qu'on obtient en faisant $10(x''-p'') = \frac{x'''}{10}$, et $\frac{1}{x'''-p'''} = z'''_{p'''}$.

66. en procédant de la sorte, au moyen des équations en $(x^{IV}-p^{IV})$, en $(x^{V}-p^{V})$ &c &c. s'il y a lieu, on finit par déterminer quelles sont, parmi les racines présumées de l'Equation proposée en x, celles qui doivent être admises

et celles qu'on doit exclure. Généralement, on n'est dans le cas de recourir à l'Équation en $(x^{(n)} - p^{(n)})$ qu'autant qu'on veut avoir des racines exactes jusqu'à la décimale $n^{ième}$ inclusivement, ou que la proposée a des racines imaginaires, dont la partie réelle n'est pas un nombre entier, et dont la partie précédée du signe − sous le signe $\sqrt{\ }$, est moindre que $\frac{1}{4(10)^n}$; encore, dans la seconde circonstance, ce recours n'est-il pas toujours nécessaire.

Nous sommes donc arrivés, par notre méthode, au but que nous nous sommes proposé, qui est de trouver exactement, jusqu'à telle décimale qu'on voudra, les seules valeurs réelles qui puissent être assignées à l'équation numérique d'un degré quelconque, et nous y sommes parvenus par le seul emploi des deux premières règles de l'arithmétique. La pratique étant la pierre de touche de la commodité des diverses méthodes, nous désirons que nos lecteurs s'exercent à résoudre à résoudre les mêmes équations numériques par la nôtre et par celles qui l'ont précédée ; qu'ils résolvent par exemple l'Équation du 5e degré du No. 63, et celle du 4e. degré du No. 55.

Notes

Sur le chapitre 1er.

(A). Nous avons dit au sujet du procédé que Mr Lagrange a proposé pour corriger la méthode des substitutions successives, qu'il pourrait donner lieu, en certains cas, à des milliers, et même à un nombre indéfiniment plus grand d'opérations superflues. Soit, par exemple, une équation du 4e degré, ayant une de ses racines entre 0 et 1 ; une autre racine entre 1 et 2 ; une 3e égale à 4 moins un demi-millionième ; et, pour dernière racine, 4, plus un demi-millionième (on prend ici pour plus grande commodité une fraction rationnelle). Dans ce cas la limite de la plus petite différence des racines sera moindre qu'un millionième. Donc si l'on fait $D < \frac{1}{1000000}$ dans la progression arithmétique 0, D, 2D, 3D, &c., le nombre des termes à substituer devra s'élever à plus de quatre millions ; tandis que cette même équation peut se résoudre par la seule substitution des nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c. Cette extrême multiplicité de substitutions est donc un luxe infiniment onéreux ; et l'on aurait, généralement, plutôt fait d'employer successivement pour les substitutions, au lieu de la série 0, D, 2D, 3D &c. la série des unités simples ; puis, en cas d'insuffisance, celle des dixièmes ; puis encore celle des centièmes, et ainsi de suite.

Ce parti serait préférable, lors même qu'on serait tenu, en l'adoptant, d'opérer la substitution des nombres de chaque série compris entre chaque terme de la série précédente et le terme suivant, c'est-à-dire, de substituer les 10es compris entre 0 et 1, entre 1 et 2, entre 3 et 4, et ainsi de suite sans exception &c. à plus forte raison, ce mode de substitution doit-il être préféré lorsqu'on a trouvé le moyen de se dispenser de la plupart de ces intercalations ou substitutions intermédiaires, ainsi que cela se rencontre dans notre méthode.

Par le même motif, dans une équation dont la plus grande racine paraîtrait susceptible de renfermer dans sa valeur des dixaines, ou des centaines, &c, on devrait employer, pour les premières substitutions, la série des dixaines, ou celle des centaines, &c. Les termes de chacune des progressions arithmétiques qu'il conviendrait d'employer successivement, peuvent être représentés d'une manière générale par 0, 10^n, 2.10^n, 3.10^n &c n étant un nombre entier positif, ou zéro, ou un nombre entier négatif. On doit commencer par la substitution des termes de la progression dont la différence 10^n est la puissance de 10 immédiatement inférieure à la limite de la plus grande racine positive. Si cette limite, par exemple, était comprise entre cent & mille, la différence de la première progression à employer serait 10^2. La dernière progression à laquelle on puisse être dans le cas de recourir, est celle dont la différence est la puissance de 10 immédiatement inférieure à **D**; mais on pourra souvent, ainsi que nous l'avons fait observer, se trouver dispensé d'en venir à cette progression, et même à plusieurs de celles dont l'emploi doit précéder le sien. L'exemple allégué au commencement de cette note en est une preuve sensible. Quoique les puissances de tout autre nombre que 10 puissent être prises pour les différences respectives de ces progressions, ce dernier nombre doit, en général, être adopté de préférence, à cause de la facilité des calculs, qui résulte de ce qu'il est la base du système de numération adopté.

Si les quatre premières racines d'une équation proposée, du 6e degré, étaient des imaginaires dont la partie réelle fût un nombre entier positif moindre que 3, les deux dernières racines restant les mêmes que ci-dessus, c'est-à-dire $4-\frac{1}{2000000}$ et $4+\frac{1}{2000000}$; alors les 4 millions, et plus, de substitutions à opérer seraient rigoureusement nécessaires pour la résolution de l'équation, selon la méthode de Mr Lagrange; et cette dure nécessité est encore un inconvénient

extrêmement grave. Pour résoudre une semblable équation, à moins d'une unité près, suivant la nouvelle méthode, il ne faut que quelques minutes.

(B) En parlant du fameux théorème de Descartes, l'illustre auteur du traité de la résolution des équations numériques y rappelle que les anglais attribuent cette règle à leur compatriote Harriot. Il est vrai que Descartes, de son vivant même, fut aussi par les anglais de cette espèce de plagiat, comme ils ont formé depuis une semblable imputation contre Leibnitz. Mais en rappelant cette accusation surannée, qui n'a point empêché que le théorème dont il s'agit n'ait été constamment appelé la règle de Descartes, il est juste aussi d'observer qu'elle a été détruite par plusieurs auteurs du 17e siècle. Le P. Prestet, dans ses élémens en 1689 provoque, à ce sujet, la comparaison des écrits d'Harriot avec ceux de Descartes. « Lorsque M. Wallis, dit-il, un peu trop jaloux de la gloire que la France s'est acquise dans les mathématiques, vient renouveller cette accusation ridicule, on est en droit de ne le point croire, puisqu'il parle sans preuves. M. Hudde, hollandais, qui n'est point suspect, puisqu'il n'avait aucun intérêt à soutenir les auteurs français, est bien plus équitable dans le jugement qu'il porte de M. Descartes. »

Sur le chapitre „2„

(C) Les deux propositions, dont dépend l'algorithme du Chapitre 2e nous avaient paru nouvelles. Mais nous ne devons pas taire que M. Legendre, dans son rapport sur une partie de notre travail, en a jugé autrement. Suivant lui « les deux théorèmes que l'auteur regarde comme nouveaux, ne sont que l'énoncé de propriétés déjà connues, relatives à la sommation des suites, et ce qui lui appartient se réduit à l'algorithme propre à opérer les transformations »

Si l'on considère que le second de ces théorèmes est l'algorithme ne sont qu'une seule et même chose, on aura sans doute quelque peine à comprendre quel'un appartienne à l'auteur, si l'autre ne lui appartient pas. Peut-être le rapporteur se serait-il exprimé avec plus de justesse et de justice, s'il eût dit que ces deux propositions jusqu'ici inconnues, sont des conséquences si faciles à déduire des principes déjà reçus, qu'il peut paraître étonnant qu'on ne s'en soit pas avisé plutôt. Peut-être, du moins, aurait-il mieux valu que M. Legendre, en niant la nouveauté de ces propositions, ne se fût pas borné à cette simple négation, et qu'il eût bien voulu indiquer en quel ouvrage, élémentaire ou non, elles se trouvent consignées. Quoiqu'il en soit, d'après l'imposante autorité du savant rapporteur, on conçoit qu'il est inutile de s'arrêter ici à prouver des propriétés connues.

« Démonstration de la 1re Proposition.

« J'observe d'abord que si l'on prend les différentes sommes de la série « suivante, on aura les nombres qu'on appelle figurés.

« Série donnée	1	1	1	1	
« 1re Somme	1	2	3	4	1er ordre
« Somme 2e	1	3	6	10	2e ordre ou triang.
« Somme 3e	1	4	10	20	3e ordre ou pyr.
« Somme 4e	1	5	15	35	4e ordre
	⋮	⋮	⋮	⋮	
« Somme mème	1	m	$\frac{m \cdot m+1}{1 \cdot 2}$	$\frac{m \cdot m+1 \cdot m+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	&c mᵉ ordre

« Et pour le nombre n de termes de l'ordre m, le dernier terme « des nombres figurés de cet ordre sera

$$\frac{m \cdot m+1 \cdots\cdots (m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots\cdots n-1}.$$

« Prenons maintenant la série proposée $A_0 + A_1 + A_2 \cdots + A_{n-1}$ « et formons les différentes sommes, nous aurons les suites suivantes

$$\begin{array}{ll}
\text{« Série,} & A_0 + A_1 + A_2 \cdots\cdots\cdots + A_{n-1} \\
\text{« S. 1re} & A_0 + (A_0 + A_1) + (A_0 + A_1 + A_2) \cdots + (A_0 \cdots + A_{n-2} + A_{n-1}) \\
\text{« S. 2e} & A_0 + (2A_0 + A_1) + (3A_0 + 2A_1 + A_2) \cdots + (\cdots 3A_{n-3} + 2A_{n-2} + A_{n-1}) \\
\text{« S. 3e} & A_0 + (3A_0 + A_1) + (6A_0 + 3A_1 + A_2) \cdots + (\cdots + 6A_{n-3} + 3A_{n-2} + A_{n-1}) \\
 & \vdots \\
\text{« S. mème} & A_0 + (mA_0 + A_1) + \left(\frac{m \cdot m+1}{1 \cdot 2} A_0 + mA_1 + A_2\right) \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

$$\text{«} \quad + \frac{(m \cdot m+1 \cdots (m+n-2))}{1 \cdot 2 \cdots n-1} A_0 + \cdots\cdots \frac{m \cdot m+1}{1 \cdot 2} A_{n-3} + mA_{n-2} + A_{n-1}$$

« mais le dernier est la somme mème des n premiers termes de la série « donnée de plus la suite des coefficiens des termes $A_0 \cdots A_{n-3} + A_{n-2} +$ « A_{n-1} est celle des nombres figurés prise dans un ordre inverse, « on aura donc en reversant l'ordre des termes.

$$\text{«} \quad A_{n-1} + mA_{n-2} + \frac{m \cdot m+1}{1 \cdot 2} A_{n-3} \cdots\cdots + \frac{m \cdot m+1 \cdots (m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots n-1} A_0.$$

« Ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration de la 2e proposition.

« Soit l'Equation. $ax^m + bx^{m-1} + c\,x^{m-2} + \cdots\cdots A = 0.$

« Supposons que les coefficiens de la Transformée en $(x-1)$ soient connus « et représentons les par a', b', c', $\cdots A'$ nous aurons.

$$\text{«} \quad ax^m + bx^{m-1} + c'x^{m-2} \cdots + A = a'(x-1)^m + b'(x-1)^{m-1} + c'(x-1)^{m-2} \cdots + A'$$

« développons les binomes $(x-1)^m$, $(x-1)^{m-1}$, $(x-1)^{m-2}$ &c d'après « la formule ordinaire, nous aurons :

$$\text{«} \quad (x-1)^m = x^m - mx^{m-1} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} x^{m-2} - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} + \&c.$$

$$\text{«} \quad (x-1)^{m-1} = x^{m-1} - (m-1)x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} x^{m-3} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-4} + \&c.$$

$$\text{«} \quad (x-1)^{m-2} = x^{m-2} - (m-2)x^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} x^{m-4} - \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-5} + \&c.$$

« ainsi de suite.

« Substituant dans l'Equation ci-dessus, nous aurons :

" $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots\ldots + A =$

" $= \begin{cases} a'x^m - a'mx^{m-1} + a'\frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a'x^{m-3} + \&c. \\ \quad + b'x^{m-1} - b'(m-1)x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}b'x^{m-3} - \&c. \\ \quad\quad + c' \quad x^{m-2} - (m-2)c'x^{m-3} + \&c. \\ \quad\quad\quad + d'x^{m-3} \quad + A'. \end{cases}$

" Ces deux Equations devant être identiques, nous aurons

" $a' = a$ . . . . $a' = a$

" $-a'm + b' = b$, $b' = b + am$ . . . . $b' = b + am$

" $\frac{a'm.m-1}{1.2} - b'(m-1) + c' = c$

" $\frac{am^2 - am}{1.2} - (b+am)(m-1) + c' = c$

" $-\frac{am^2}{2} + \frac{am}{2} - m'b + b + c' = c$

" $c' = c + \frac{am^2 - am}{1.2} + (m-1)b$ . . . . $c' = c + (m-1)b + \frac{m.m-1}{1.2}a$

" on aurait de même . . . . $d' = d + (m-2)c + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}b + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}a$

" ainsi de suite.

" La Transformée en $x-1$ sera donc, n étant le nombre des termes.

" $a(x-1)^m + (b+am)(x-1)^{m-1} + \left(c + (m-1)b + \left(\frac{m.m-1}{1.2}\right)a\right)(x-1)^{m-2} + \ldots\ldots$

" . . . . $\left(\ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-2))}{1.2\ldots n-1}a\right)$

" or le coefficient du 1er terme est égal à la somme $m^{ème}$ de tous les coefficiens du polynome, excepté les $(m-1)$ derniers termes.

" Le coefficient du 2e terme est égal à la somme $m^{ème}$ de tous les termes, excepté les $(m-2)$ derniers termes

" Celui du 3e terme est égal à la somme $(m-1)^{ème}$ de tous les termes excepté les $(m-3)$ derniers termes

" ainsi de suite jusqu'au dernier qui est la somme [illegible]^{ème} de tous les termes

" Demonstration du § 23

" Pour le cas du 3ème degré on a $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

" En dans ce cas la Transformée en $x-1$ devient

" $ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+2b+3a)x + (a+b+c+d) = 0$

" on voit déjà comment le calcul s'opère instantanément.

(D) L'algorithme indiqué au N° 26, pourrait être employé à la recherche directe des racines négatives, mais il nous a paru plus simple et plus commode de ramener cette recherche, comme on a coutume de faire, à celle des racines positives en d'employer, à cet effet, notre algorithme ordinaire.

(E) L'algorithme du second chapitre en perdant un peu de sa simplicité, peut s'étendre au calcul de la transformée en $\left(x - \frac{n}{d}\right)$ d n'étant plus seulement une puissance de 10, mais un nombre entier quelconque. Il faut, pour cela, faire $x = \frac{x'}{d}$ et, pour avoir les coefficiens de l'Equation en x', multiplier respectivement ceux de l'équation en x, à compter de celui x^m, par $d^0, d^1, d^2, d^3, \ldots d^m$. Ensuite par de simples additions et soustractions, on se procure (N° 22, 24, 25) la Transformée en $x'-n$, dont les coefficiens, à compter de celui de la plus haute puissance, respectivement divisés par $d^0, d^1, d^2, d^3 .. d^m$ deviennent ceux de l'équation en $\left(x - \frac{n}{d}\right)$. Par ce procédé, le nombre des multiplications et des divisions est diminué, autant qu'il se peut.

Sur le Chapitre 3

(F) On a vu (N° 35) comment on peut déterminer une limite, en moins, de la plus petite valeur positive, et une limite, en plus, de la plus grande valeur que puisse avoir une inconnue d'une équation. Mais il est une remarque qui n'a pas encore été faite, c'est qu'on peut déterminer deux limites semblables pour les valeurs réelles qu'une équation peut avoir entre zéro et 1, en voici comment.

Pour obtenir une limite moindre que la plus petite racine, on use du même procédé qu'au N° 35; c'est-à-dire, on prend le quotient du dernier terme divisé par la somme de ce même terme et du plus grand coefficient précédé d'un signe contraire: Ce quotient donne nécessairement une fraction pour limite de la plus petite racine positive.

La limite de la plus grande racine qui puisse être comprise entre zéro et un, se découvre à l'aide de la transformée en $(x-1)$, après qu'on a changé les signes de ses coefficients de rang pair. Le plus grand coefficient de cette équation, ainsi modifiée, de signe contraire à celui de son dernier terme, étant divisé par la somme de ce coefficient et du dernier terme, le quotient est une fraction dont la valeur surpasse celle de la plus grande racine que la proposée en x puisse avoir entre 0 & 1. Cette fraction est le complément, à l'unité, de celle qui exprime la limite de la racine la plus voisine de zéro, que l'équation en $(x-1)$ puisse avoir entre 0 & 1. avec un peu de réflexion on aperçoit aisément la raison de ceci.

On jugera, par la suite de ces notes, de quelle importance peut être cette remarque.

Sur le Chapitre 4.

(G) Parmi les cas susceptibles d'être résolus par la première partie de la nouvelle méthode, on a compté celui où la proposée n'a ni racines imaginaires, ni plusieurs racines réelles comprises entre deux nombres entiers p et $p+1$. Il peut se néanmoins présenter alors une difficulté, provenant de la première des racines commensurables de l'équation; en voici un exemple, avec le moyen d'y obvier. Soit l'équation,

$$x^3+x^2-3x+1=0$$

On a les coefficiens des équations

En x ..... $1+1-3+1$

En $(x-1)$ ..... $1+4+2+0$

Dans cette circonstance où la proposée a l'unité pour racine, il se pourrait qu'il y eût une autre racine entre 0 & 1, dont l'existence ne serait point manifestée par le dernier terme. Si cette racine existe en effet, on s'en assurera en prenant la somme des trois premiers termes de la proposée $1+1-3$, laquelle somme égalant -1, est de signe contraire au 3e terme $+2$ de la transformée en $(x-1)$, et par conséquent, atteste l'existence d'une racine entre 0 et 1.

La raison de ceci, est que dans ce cas, l'équation du 2e degré qui résulte de la division de la proposée par $x-1$, a pour ses coefficiens respectifs les sommes premières des coefficiens de la proposée, à commencer du premier jusqu'au troisième. Ces sommes étant $1, 2, -1$ l'équation du 2e degré est,

$$x^2+2x-1=0$$

dont la transformée en $(x-1)$ est,

$$(x-1)^2+4(x-1)+2=0$$

Cette opération serait inutile si on savait d'avance que la proposée n'a point de racines imaginaires, la simple comparaison des signes de cette équation avec ceux de sa transformée étant alors suffisante pour manifester l'existence de la racine entre 0 & 1.

Quoique l'exemple employé dans cette note soit celui d'une équation en x du 3e degré, dont la transformée en $(x-1)$ n'a que son dernier terme égal à zéro, le procédé est général. Si la proposée étant du degré m, et sa transformée en $(x-1)$ ayant ses n derniers termes égaux, chacun, à zéro, il faut alors prendre la somme des $m+1-n$ premiers coefficiens de l'équation proposée; cette somme est la valeur du dernier terme de l'équation en x, du degré $(m-n)$ qui est le même degré auquel la transformée en $(x-1)$ se trouve abaissée par l'égalité à zéro de ses n derniers termes.

(H) Nous n'aurions peut-être pas dû faire mention, au N° 48, de l'objection opposée à la nouvelle méthode; mais nous savons que cette objection a été faite dans les propres termes que nous avons rapportés; en dès lors il a bien fallu en montrer la frivolité. Qu'elles sont d'ailleurs les méthodes ordinaires qu'on puisse dire plus expéditives, et en même temps aussi sûres, aussi générales que la nôtre?

Sur le chapitre. 5.

(I) Outre le criterium que nous avons fait connaître (N° 53) il en existe plusieurs autres qui, sans avoir tous les avantages du premier, peuvent souvent en tenir lieu. Un second criterium consiste dans ce corollaire aussi important par son utilité que facile à déduire de la remarque que nous avons consignée dans la note F.

Une équation n'a point de racines entre zéro et un, lorsque la limite, en moins, de sa plus petite racine, est égale ou supérieure à la limite, en plus, de la plus grande racine qu'elle puisse avoir entre zéro & un.

Soit, pour exemple, la même équation du N° 53,

$$x^3-4x^2+3x-6=0$$

Coefficients des équations,

En x ... $1-4+3-6$
En $(x-1)$ .. $1-1-2-6$

Ici la plus petite valeur que x puisse avoir entre zéro & un, doit être supérieure à $\frac{6}{9}$ ou $2/3$; et la plus grande doit être au-dessous de $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$; la contradiction qui se rencontre entre ces deux conditions fait voir l'impossibilité qu'il y ait des valeurs positives de x au-dessous de l'unité.

(K) À l'aide du Criterium que nous avons indiqué dans la note précédente, on peut souvent résoudre une équation numérique, sans avoir besoin de recourir aux transformées collatérales.

Prenons pour exemple la même équation.

$$x^3-4x^2+3x-6=0$$

Coefficients des Équations.

En x ..... $1-4+3-6$
En $(x-1)$ --- $1-1-2-6$
En $(x-2)$ --- $1+2-1-8$
En $(x-3)$ --- $1+5+6-6$
En $(x-4)$ --- $1+8+19+6$

On a déjà vu que x ne peut avoir de valeur entre 0 et 1.

La plus petite racine de l'équation en $(x-1)$ doit surpasser $6/7$ et la plus grande racine positive, inférieure à 1, que cette cette équation puisse avoir doit être au-dessous de $2/10$ ou $1/5$. La contradiction est évidente. Donc l'Équation en $(x-1)$ n'a point de racine positive entre zéro et 1; et par conséquent celle en x n'en a point entre 1 et 2.

De même, les fractions qu'on voudrait admettre comme racines de l'équation en $(x-2)$, devraient être en même temps au-dessus de $8/10$ ou $4/5$, et au-dessous de $5/11$ conditions incompatibles. Donc l'équation en $(x-2)$ n'a pas de racines entre 0 et 1; et par conséquent celle en x n'en a point entre 2 et 3.

L'équation en $(x-3)$ n'a qu'une racine positive qui est manifestée en 0 et 1; par conséquent x a une valeur positive entre 3 et 4, et la proposée n'a pas d'autre racine réelle, vu que n'ayant point de permanence de signe, elle n'a point de racine négative, et que l'absence des variations de signe dans la transformée en $(x-4)$ établit le nombre 4 pour plus grande limite de la plus grande racine positive de la proposée.

(L) Un troisième Criterium s'offre encore à nous: une équation n'a point de racine entre zéro et un, lorsque la suite formée par les sommes premières de ses coefficients prises à rebours ne présente point de variations de signe. Cette proposition est une conséquence de notre algorithme (N° 20); car il est évident que l'absence des variations de signe dans cette suite entraîne cette même absence dans la transformée collatérale.

Ainsi dans la même équation qui vient de nous servir d'exemple les coefficiens pris à rebours étant :

$$-6 + 3 - 4 + 1,$$

les sommes 1res sont .. $-6 - 3 - 7 - 6$;

d'où il suit que l'équation en x n'a point de racine entre 0 et 1.

Le Criterium s'applique pareillement aux deux transformées de cette équation en $(x-1)$ et en $(x-2)$. L'opération qu'il exige peut souvent se faire mentalement, et même d'un coup d'œil, comme cela se trouve dans le cas pris pour exemple ; ce qui rend ce Criterium très commode.

(M). Il est encore d'autres circonstances où l'on peut se dispenser de calculer les transformées collatérales.

Lorsque les transformées successives en $(x-1)$ $(x-2)$ &c. ont fait découvrir autant de racines positives que la proposée a de variations de signe, on voit que les collatérales en $(z-1)$, (z_1-1), (z_2-1), &c. deviennent inutiles. C'est donc surabondamment que ces dernières ont été employées au No. 54, dans la recherche des racines positives de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$; et au No 55 dans celle des racines négatives de l'équation $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6x - 12 = 0$

Dans la première équation de ce même No 55, la seule règle de Descartes rendait inutiles toutes les transformées collatérales, à l'exception de celle en (z_2-1). Il suffit pour s'en convaincre, de jetter les yeux sur les signes des coefficiens de cette équation et de ses transformées successives. On en peut dire autant par rapport à l'équation en x du No. 62, et à ses transformées successives. En général, il ne faut point perdre de vue cette règle de Descartes, dont les applications se présentent fréquemment dans la nouvelle méthode.

Lorsqu'on est parvenu à découvrir $m-2$ racines réelles d'une équation du degré m, on ne peut supposer que les deux restantes, aient des valeurs réelles comprises entre deux nombres entiers p et $p+1$ si l'équation en $(x-p-1)$ n'a pas au moins deux

permanences de signe de plus que celle en $(x-p)$: ainsi dans l'équation du No 46, $x^3 - 7x + 7 = 0$ lors même qu'on ignorerait que toutes ses racines sont réelles, la seule vue des transformées successives apprendrait qu'il ne faut chercher les deux racines positives de la proposée qu'entre 1 & 2.

(N) Le Criterium qui est indiqué au No 53 et que l'on doit considérer comme le plus important, peut être généralisé, ainsi : une équation en x ne peut avoir plus de racines comprises entre 0 et u, qu'il n'y a de variations de signe dans l'équation en $(z - \frac{1}{u})$; u représentant une valeur positive quelconque, et z égalant $\frac{1}{x}$.

Sur quoi il faut observer qu'en faisant $z' = uz$, on a les mêmes variations de signe dans l'équation en $(z'-1)$ ou $(\frac{u}{x} - 1)$ que dans celle en $(z - \frac{1}{u})$ ou $(\frac{1}{x} - \frac{1}{u})$, en sorte qu'il suffit sous ce rapport d'obtenir la première.

Ainsi la proposée en x n'aura point de racine entre 0 et u, lorsque la transformée en $(z'-1)$ ou $(\frac{u}{x} - 1)$ n'aura que des permanences de signe.

Cette uniformité des signes de la transformée aura constamment lieu lorsqu'il n'y a aucune valeur de x entre 0 et u, si ce n'est quand la proposée a une ou plusieurs couples de racines imaginaires de la forme $f \pm \sqrt{-\varphi}$, f ayant une valeur positive moindre que celle de u, et φ étant moindre que $f(u-f)$, et par conséquent moindre que $\frac{u^2}{4}$. Le cas d'exception est le seul qui puisse produire quelque variation de signe dans la transformée en $(z'-1)$ encore n'en est-ce pas un effet nécessaire.

Dans ce cas, si $u = 1$, f est une fraction, et φ est $< \frac{1}{4}$.

Si $u = 10$, f est entre 0 et 10, et u est $< \frac{10^2}{4}$ ou 25,

Si $u = 100$, f est entre 0 et 100, et u est $< \frac{100^2}{4}$ ou 2500,

Et généralement si $u = 10^n$, f est entre zéro et 10^n, et φ est $< \frac{10^{2n}}{4}$ ou $25 . 10^{2(n-1)}$ Ceci a généralement lieu lorsque l'exposant n est négatif.

Ces résultats se lient avec ceux des N.os 57, 61, et 64; et le Criterium ainsi généralisé, se démontre d'une manière analogue à celle du N.o 57: z' ou $\frac{u}{x}$ est ici $\frac{u}{f \pm \sqrt{-\varphi}}$ ou $\frac{uf \mp \sqrt{-u^2\varphi}}{f^2+\varphi}$ ainsi la partie réelle de $z'-1$ est $\frac{f(u-f)-\varphi}{f^2+\varphi}$ quantité qui ne peut être >0 qu'autant que le nombre f est positif et plus petit que u, et que φ est $< f(u-f)$.

(O). Appliquons ceci à l'équation.

$$x^4 - 12x^3 + 58x^2 - 132x + 121 = 0$$

Cette équation est la même qui a été résolue au N.o 55 à l'aide de ses transformées successives en $(x-1)$, &c., et des transformées collatérales en $(z-1)$, (z_1-1). &c. Il est aisé de reconnaître (55) que ses racines positives, si elle en a, sont moindres que 3.

Les coefficiens de l'Équation inverse en z ou $\frac{1}{x}$ étant;

$$121 - 132 + 58 - 12 + 1\ ;$$

Ceux de l'Équation en $z' = 3z$, sont:

$$121 - 3.132 + 3^2.58 - 3^3.12 + 3^4.81;$$

oubien $\quad 121 - 396 + 522 - 324 + 81$

Les coefficiens de l'équation en $(z'-1)$ calculés par l'algorithme, sont;

$$121 + 88 + 60 + 16 + 4$$

donc la proposée n'a point de racine positive moindre que 3; et comme elle n'en peut avoir qui soit égale ou supérieure à ce nombre, et que l'absence des permanences en exclut toute racine négative, il s'ensuit que l'équation en x n'a point de racines réelles.

L'application de ce Criterium n'a pas le même résultat dans l'équation suivante.

$$x^3 - 2{,}1x^2 + 0{,}41x + 0{,}855 = 0$$

Équation dont la plus grande racine positive, s'il y en a, est < 4,

Les coefficiens de l'Équation en $z' = 4z = \frac{4}{x}$ sont

$$0{,}855 + 4 \times 0{,}41 - 16 \times 2{,}1 + 64$$

oubien $\quad ...0{,}855 + 1{,}64 - 33{,}6 + 64$

Ceux de l'équation en $(z'-1)$ sont ...

$$0{,}855 + 4{,}205 - 27{,}755 + 32{,}895.$$

Donc la proposée en x a, soit une couple de racines positives soit une couple de racines imaginaires dont la partie réelle est entre 0 et 4, et dont la partie précédée du signe $-$ sous le signe $-$ est $< \frac{4^2}{4}$ ou < 4.

Si l'on fait attention que les coefficiens de cette proposée sont les mêmes que ceux de la transformée en $(x-1)$ du N.o 62, on apercevra aisément que c'est un cas d'exception semblable à celui que présente l'équation en x résolue dans ce numéro.

(P.) Le Problème de la résolution des équations numériques étant réduit par la nouvelle méthode à la recherche des racines d'une équation comprises entre zéro & 1, il est avantageux de multiplier les moyens de reconnaître l'absence de toute racine réelle entre ces deux limites: En voici donc un quatrième.

On prendra la somme des coefficiens de signe contraire à celui du dernier terme. Si elle n'est pas plus grande que ce terme, on en conclura évidemment que l'équation n'a pour racine aucune valeur entre 0 et 1.

Ce moyen si simple, appliqué successivement aux diverses transformées, suffit quelquefois à la résolution d'une équation.

Reprenons l'exemple déjà employé

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0$$

Coefficiens des équations.

En x ..... $1 - 4 + 3 - 6$
En $(x-1)$ .... $1 - 1 - 2 - 6$
En $(x-2)$ .... $1 + 2 - 1 - 8$
En $(x-3)$ ... $1 + 5 + 6 - 6$
En $(x-4)$ ... $1 + 8 + 19 + 6$

Au premier coup d'œil jetté sur les coefficiens, on reconnaît à l'aide de ce quatrième Criterium que la proposée n'a point de racine réelle entre 0 et 3 ; et par la règle de Descartes, on voit que la proposée n'a qu'une racine réelle, comprise entre 3 et 4. Cette seule règle, d'ailleurs, suffisait pour indiquer l'absence de toute racine réelle entre 1 et 3.

(Q) Si l'essai du moyen précédent n'a pas suffi, on peut aussi prendre la limite, en plus, des valeurs positives que l'équation peut avoir pour racines entre 0 et 1 en la manière indiquée par la note (F), substituer cette limite à la place de l'inconnue dans les termes de signe contraire à celui du dernier terme, et prendre la somme des termes où la substitution a été faite. Pour que l'inconnue puisse avoir quelque valeur entre 0 et 1, il faut évidemment que cette somme surpasse la valeur du dernier terme. Ce moyen est d'une application assez facile, quand la limite donnée s'agit en une fraction dont les termes n'ont, chacun, qu'un seul chiffre ; et il est souvent aisé de s'en procurer un semblable.

(R) Si l'on fait $-(x-1)=\xi$, et par conséquent $-x=\xi-1$ après le changement des signes des termes de rang pair dans les équations en $(x-1)$ et en x, on aura deux équations en ξ et $(\xi-1)$ auxquelles on pourra appliquer les mêmes moyens indiqués dans les notes précédentes, pour manifester l'absence des racines réelles entre 0 et 1 dans l'équation en ξ, et par conséquent dans celle en x.

(S) Ces divers moyens tendant à diminuer beaucoup le nombre des opérations, ne doivent pas être négligés dans l'usage de la nouvelle méthode. Néanmoins il pourra paraître convenable de ne point embarrasser les commençans par trop de détails, et de les exercer d'abord à résoudre les équations par les seuls procédés indiqués dans le corps de l'ouvrage.

(T) Un Criterium d'une grande importance est celui qui résultera de la 2e proposition du No 39, si on l'admet en principe général pour une équation quelconque. « Il arrive quelquefois dans ces matières, dit Fontenelle, que l'on
« trouve de bonnes méthodes, et qu'il n'est pas aisé d'en trouver une dé-
« monstration assez précise et assez claire. On voit la route qu'il faut tenir, on
« voit où l'on arrivera, on arrive toujours ; mais à toute rigueur, on pourrait
« douter, et on ne forcerait pas un incrédule, triomphe indispensable
« pour les mathématiques. » Cependant la règle même de Descartes, la théorie des parallèles, et plusieurs autres vérités mathématiques, ont été généralement admises long-temps avant qu'elles aient été rigoureusement démontrées.

Sur le Chapitre 6.

(U) D'après les équations.

$10(x-p)=x'$, $10(x'-p')=x''$ ... $10(x^{(n-1)}-p^{(n-1)})=x^{n}$

on reconnait aisément que ;

$$x^{(n)}-p^{(n)}=10^n\left(x-p-\frac{p'}{10}-\frac{p''}{100}-\cdots-\frac{p^{(n)}}{10^n}\right)$$

Il est donc facile de passer, respectivement, des équations en $(x'-p')$ $(x''-p'')$, $(x'''-p''')$, &c aux équations en $\left(x-p-\frac{p}{10}\right)$, $\left(x-p-\frac{p'}{10}-\frac{p''}{100}\right)$ $\left(x-p-\frac{p'}{10}-\frac{p''}{100}-\frac{p'''}{1000}\right)$, &c.

généralement les coefficiens de l'équation en $(x^{(n)}-p^{(n)})$ du degré m, divisés respectivement, à compter de celui de la plus haute puissance, par $(10^n)^1, (10^n)^1, \ldots (10^n)^m$ deviennent les coefficiens de l'équation en $\left(x-p-\frac{p'}{10}-\cdots-\frac{p^{(n)}}{10^n}\right)$.

Ainsi le terme tout connu de cette dernière équation est égal au terme tout connu de celle en $(x^{(n)}-p^{(n)})$ divisé par 10^{nm}. Par conséquent, le dernier terme d'une transformée en $(x^{(n)}-p^{(n)})$ divisé par 10^{nm}, est égal au résultat que donne le nombre $\left(p+\frac{p'}{10}+\cdots+\frac{p^{n}}{10^n}\right)$ substitué à x dans l'équation proposée.

(a) Il résulte de ce qui précède que les transformées en $(x-p)$, $(x'-p')$, &c., sans autre opération ultérieure de calcul que le placement convenable de la virgule indicative des décimales, donnent arithmétiquement les valeurs de l'ordonnée y, correspondant aux valeurs entières et décimales de l'abscisse x dans la courbe qui a pour équation.

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots A_{m-1}x^1+A_mx^0=y$$

On ne s'arrêtera point ici à montrer comment la considération de ces valeurs numériques de y peuvent contribuer à la résolution d'une équation numérique.

(b) Une autre conséquence est que les coefficiens de l'équation en $(x^{(n)}-10)$, respectivement divisés par $10^0, 10^1, 10^2 \ldots 10^m$, deviennent ceux de l'équation en $(x^{(n-1)}-p^{(n-1)}-1)$; c'est-à-dire, l'équation