Sur le CHAPITRE VI.

(U) D'APRÈS les équations.....

$10(x-p)=x'$, $10(x'-p')=x''$, ... $10(x^{(n-1)}-p^{(n-1)})=x^{(n)}$,

on reconnoît aisément que

$$x^{(n)}-p^{(n)}=10^n\left(x-p-\frac{p'}{10}-\frac{p''}{100}-\dots\dots-\frac{p^{(n)}}{10^n}\right).$$

Il est donc facile de passer, respectivement, des équations en $(x'-p')$, $(x''-p'')$, $(x'''-p''')$, etc. aux équations en $\left(x-p-\frac{p'}{10}\right)$, $\left(x-p-\frac{p'}{10}-\frac{p''}{100}\right)$, $\left(x-p-\frac{p'}{10}-\frac{p''}{100}-\frac{p'''}{1000}\right)$, etc.

Généralement, les coefficiens de l'équation en $(x^{(n)}-p^{(n)})$ du degré m, divisés respectivement, à compter de celui de la plus haute puissance, par $(10^n)^0$, $(10^n)^1$, ...$(10^n)^m$, deviennent les coefficiens de l'équation en $\left(x-p-\frac{p'}{10}-\dots\dots-\frac{p^{(n)}}{10^n}\right)$.

Ainsi le terme tout connu de cette dernière équation est égal au terme tout connu de celle en $(x^{(n)}-p^{(n)})$, divisé par 10^{mn}. Par conséquent le dernier terme d'une transformée en $(x^{(n)}-p^{(n)})$, divisé par 10^{mn}, est égal au résultat que donne le nombre $\left(p+\frac{p'}{10}+\dots+\frac{p^{(n)}}{10^n}\right)$ substitué à x dans l'équation proposée.

(a) Il résulte de ce qui précède que les transformées en $(x-p)$, $(x'-p')$, etc., sans autre opération ultérieure de calcul que le placement convenable de la virgule indicative des décimales, donnent arithmétiquement les valeurs de l'ordonnée y, correspondant aux valeurs entières et décimales de l'abscisse x, dans la courbe qui a pour équation....

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots A_{m-1} x^1 + A_m x^0 = y.$$

On ne s'arrêtera point ici à montrer comment la considération de ces valeurs numériques de y peuvent contribuer à la résolution d'une équation numérique.

(b) Une autre conséquence est que les coefficiens de l'équation en $(x^{(n)} - 10)$, respectivement divisés par 10^0, 10^1, 10^2, ... 10^m, deviennent ceux de l'équation en $(x^{(n-1)} - p^{(n-1)} - 1)$; c'est-à-dire, l'équation en $(x' - 10)$, ainsi modifiée, devient celle en $(x - p - 1)$; l'équation en $(x'' - 10)$ devient pareillement celle en $(x' - p' - 1)$, et ainsi de suite. Cela se prouve généralement par l'équation $10(x^{(n-1)} - p^{(n-1)}) = x^{(n)}$; d'où...... $x^{(n)} - 10 = 10(x^{(n-1)} - p^{(n-1)} - 1)$.

Or cette conséquence mérite quelque attention, en ce qu'elle fournit au calculateur un *contrôle*, ou, comme on s'exprime en Arithmétique, une *preuve* de la justesse des calculs relatifs aux transformées successives. Et par cette raison, lorsqu'on attache quelque importance à éviter les erreurs, et que les mêmes opérations ne se font point concurremment par deux calculateurs qui se servent mutuellement de contrôle, il convient de continuer les transformations jusqu'à celle en $(x^{(n)} - 10)$, quoique, sans ce motif, on fût souvent dans le cas de s'arrêter plus tôt.

Prenons pour exemple l'équation du cinquième degré du n° 63. On a pour les coefficiens de ses transformées....

en $(x - 2)$.... $1 + 7 + 13 - 3 - 16 + 6$.
en $(x - 3)$.... $1 + 12 + 51 + 88 + 50 + 8$.

On s'est trouvé dans le cas de faire $10(x - 2) = x'$, et de calculer les équations en $(x' - 1)$, $(x' - 2)$, etc., jusqu'à celle en $(x' - 8)$; mais pour s'assurer qu'il n'y a point d'erreur de calcul dans ces transformations, il faut les continuer jusqu'à l'équation en $(x' - 10)$.

Coefficiens des transformées.....

en $(x'-8)$....$1+110+4180+60200+205440+113088$
en $(x'-9)$....$1+115+4630+73410+338825+383019$
en $(x'-10)$....$1+120+5100+88000+500000+800000$.

Les coefficiens de la transformée en $(x'-10)$ respectivement divisés par 10^0, 10^1, 10^2, ...10^5, deviennent

$$1+12+51+88+50+8\,;$$

ils se réduisent, comme cela devoit être, à ceux de la transformée en $(x-3)$.

(V). On a vu, dans le Chapitre VI, comment une même méthode nous sert à approcher davantage d'une racine déjà manifestée, à moins d'une unité près entière ou décimale, et à opérer simultanément la vérification et l'approximation des racines qui restent encore à déterminer. Cette unité de méthode a été prescrite par la nature même de la chose, dans le dernier cas; et il a paru convenable de la conserver dans le premier, autant pour ne pas déroger à la simplicité des moyens, que pour ne point multiplier les méthodes sans nécessité, et pour conserver dans tous les calculs l'espèce de *preuve* ou de *contrôle* mentionné dans la note précédente.

Voici néanmoins un nouveau procédé d'approximation que nous proposons pour le premier cas, c'est-à-dire pour celui où, à l'aide de deux transformées successives en $(\xi-\pi)$ et $(\xi-\pi-1)$, et en cas de besoin, de la collatérale en $(\zeta_\pi-1)$, on a reconnu l'existence d'une seule racine comprise entre 0 et 1, pour l'équation en $(\xi-\pi)$, et par conséquent d'une seule comprise entre π et $\pi+1$, pour l'équation en ξ.

(a) Soit $\xi=\pi+\xi_1$, ou $\xi-\pi=\xi_1$; soient respectivement π_1 et Π_1 les limites, en moins et en plus, de la valeur de ξ_1 comprise entre 0 et 1, déterminées conformément à ce qui a été dit plus haut [note (F)]. On peut prendre, ou π_1, ou Π_1 pour deuxième valeur approchée de ξ_1, les premières étant zéro et un; et par conséquent $\pi + \pi_1$, ou $\pi + \Pi_1$, pour deuxième valeur approchée de ξ.

Supposons d'abord qu'on veuille approcher de la racine par des valeurs de plus en plus convergentes, qui soient toujours inférieures à la valeur exacte.

On fera $\xi_1 = \pi_1 + \xi_2$, ou $\xi_1 - \pi_1 = \xi_2$; on passera de l'équation en ξ_1 à celle en ξ_2 [*voyez* la note (E)], et l'on déterminera la limite, en moins, de la valeur de ξ_2 comprise entre o et 1. Cette limite étant représentée par π_2, la troisième valeur approchée de ξ sera $\pi + \pi_1 + \pi_2$.

On se procurera ainsi successivement les équations en $\xi_3, \xi_4, \ldots \xi_\nu$; et l'on aura $\pi + \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_\nu$ pour la $(\nu+1)^{\text{ième}}$ valeur approchée de ξ.

Supposons maintenant qu'on veuille approcher de la racine par des valeurs de plus en plus convergentes, mais toujours supérieures à la valeur exacte de ξ.

On passera de l'équation en ξ_1 à celle en $(\xi_1 - \Pi_1)$; puis faisant $\xi_1 = \Pi_1 - \Xi$, ou $\Xi = -(\xi_1 - \Pi_1)$, on obtiendra l'équation en Ξ, en changeant les signes des termes de rang pair dans l'équation en $(\xi_1 - \Pi_1)$. Il ne restera plus qu'à obtenir des valeurs de plus en plus convergentes, mais toujours inférieures à Ξ; de sorte que la valeur de plus en plus approchée de $(\Pi_1 - \Xi)$ ou ξ_1, et par conséquent celle de ξ ou $\pi + \xi_1$, demeureront toujours plus grandes que la valeur exacte. Ces approximations vers la valeur de Ξ se feront de la même manière que dans la première supposition.

(b) Prenons pour exemple cette équation que nous avons déjà résolue [54], à moins d'une unité près....

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

On a trouvé pour les coefficiens de ses transformées....

$$\text{en } (x-2)\ldots 1+6+10-1$$
$$\text{en } (x-3)\ldots 1+9+25+16.$$

Il résulte de ces transformées que l'équation en $(x-2)$ a une racine comprise entre 0 et 1, dont les premières valeurs approchées, l'une en moins, l'autre en plus, sont, respectivement, 0 et 1. Mais, en outre, ces deux transformées fournissent immédiatement les secondes valeurs approchées de cette racine, qui sont $\frac{1}{1+10}$ ou $\frac{1}{11}$ pour la valeur en moins, et $\frac{25}{25+16}$ ou $\frac{25}{41}$ pour la valeur en plus. [*Voyez* la note (F).]

On voit donc, en se bornant aux valeurs approchées en moins, que les deux premières sont, pour la proposée....

$$2 \text{ et } 2+\frac{1}{11}, \text{ ou } \frac{23}{11}; \text{ ou bien } 2{,}0909090909\ldots\ldots$$

On reconnoîtra ci-après que cette dernière valeur est exacte dans ses deux premières décimales.

Il faut maintenant, en faisant $x-2=\xi_1$, passer de l'équation en ξ_1 à celle en ξ_2 ou $\left(\xi_1-\frac{1}{11}\right)$. On peut employer à cet effet l'Algorithme modifié [note (E)], de la manière suivante.

Soit $11\xi_1=\xi'_1$: on a pour les coefficiens des équations....

$$\text{en } \xi'_1\ldots\ldots\ldots 1+6.11+10.11^2-1.11^3$$
$$\text{ou}\ldots\ldots\ldots\ldots 1+66 \quad +1210 \quad -1331$$
$$\text{en } (\xi'_1-1)\ldots 1+69 \quad +1345 \quad -54.$$

Substituant à ξ'_1-1 sa valeur $11\xi_1-1$, ou $11\left(\xi_1-\frac{1}{11}\right)$, et faisant $\xi_1-\frac{1}{11}=\xi_2$, on a pour les coefficiens de l'équation....

$$\text{en } \xi_2\ldots 11^3 \quad +69.11^2+1345.11-54.$$
$$\text{ou}\ldots\ldots 1331+8349 \quad +14795 \quad -54.$$

La limite, en moins, de ξ_2 est $\frac{54}{54+14795}$ ou $\frac{54}{14849}=\frac{1}{274+\frac{53}{54}}$: limite à laquelle on peut substituer, pour plus de simplicité, $\frac{1}{275}=\frac{1}{11.25}=0{,}0036363636\ldots$

Ainsi la troisième valeur approchée de x est...

$$2+\frac{1}{11}+\frac{1}{11.25}, \text{ ou } \frac{576}{275}; \text{ ou bien } 2{,}0945454545\ldots$$

Nous ferons voir que cette valeur est exacte jusqu'à la quatrième décimale inclusivement.

On passe ensuite, de la même manière, de l'équation en ξ_2 à celle en ξ_3 ou $\left(\xi_2-\frac{1}{11.25}\right)$. Faisant $11.25\xi_2=\xi'_2$, et substituant dans l'équation en ξ_2, on a pour les coefficiens des équations...

$$\text{en } \xi'_2 \ldots\ldots\ldots\ldots 1+69.25+1345.25^2-54.25^3$$
$$\text{ou} \ldots\ldots\ldots\ldots 1+1725\quad+840625\quad-843750$$
$$\text{en } (\xi'_2-1)\ldots\ldots 1+1728\quad+844078\quad-1399.$$

Substituant à ξ'_2-1 sa valeur $11.25\xi_2-1$, ou $11.25\left(\xi_2-\frac{1}{11.25}\right)$, et faisant $\xi_2-\frac{1}{11.25}=\xi_3$, on a pour les coefficiens de l'équation.....

$$\text{en } \xi_3 \ldots\ldots\quad 11^3.25^3+1728.11^2.25^2+844078.11.25-1399,$$
$$\text{ou} \ldots\ldots\quad 20796875+13763750\quad+232121450\quad-1399.$$

La limite, en moins, de ξ_3 est....

$$\frac{1399}{1399+232121450}, \text{ ou } \frac{1399}{232122849}; \text{ ou bien } \frac{1}{165920\,\frac{769}{1399}}.$$

Mais on peut, pour simplifier, lui substituer....

$$\frac{1}{165925}=\frac{1}{25.6637}.$$

Ainsi la quatrième valeur de x, approchée en moins, est....

$$2+\frac{1}{11}+\frac{1}{275}+\frac{1}{165925},$$

ou........2,0945454545...+0,0000060268 19...,

ou bien....2,0945514813 64....,

et cette dernière valeur est exacte jusqu'à la neuvième décimale inclusivement, comme on le verra plus bas.

(c) Les valeurs approchées de cette même racine, calculées par Newton, suivant le procédé qui lui appartient, sont....

2....2,1....2,0946....2,09455147....

M. Lagrange a aussi calculé, suivant son procédé, les valeurs approchées de cette racine, en fractions continues, alternativement plus petites et plus grandes que x. Les résultats sont....

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \text{etc.}$$

La dixième de ces valeurs, $\frac{16415}{7837}$, qui est approchée en plus, étant réduite en décimales, devient 2,0945514865.

Les valeurs approchées en moins, trouvées suivant le nouveau procédé que nous indiquons dans cette note, étant....

$$2\ldots 2+\frac{1}{11}\text{ ou }\frac{23}{11}\ldots 2+\frac{1}{11}+\frac{1}{275}\text{ ou }\frac{576}{275}\ldots 2+\frac{1}{11}+\frac{1}{275}+\frac{1}{165925},$$

ou bien 2,09090909.....2,09454545.......2,0945514813 64...,

on voit que ce procédé a donné des résultats un peu plus exacts que celui de Newton, et qu'il les a donnés plus promptement qu'on ne les obtient par le procédé de M. Lagrange.

En outre, ce procédé est général et sûr, et la méthode de Newton n'a pas ces avantages. « En général, l'usage de cette » méthode n'est sûr, dit M. Lagrange, que lorsque la valeur » approchée est à la fois ou plus grande ou plus petite que

» chacune des racines réelles de l'équation, et que chacune des » parties réelles des racines imaginaires; et parconséquent, cette » méthode ne peut être employée sans scrupule que pour trouver » la plus grande ou la plus petite racine d'une équation qui » n'a que des racines réelles ou qui en a d'imaginaires, mais » dont les parties réelles sont moindres que la plus grande » racine réelle, ou plus grande que la plus petite de ces » racines..... en regardant, comme on le doit, les quan- » tités négatives comme plus petites que les positives, et les » plus grandes négatives comme plus petites que les moins » grandes. (*De la Résolution des Equations numériques*, » *page* 141.) »

Si l'on emploie, au lieu du procédé de Newton, la méthode d'approximation tirée des séries récurrentes, on trouve, pour les valeurs approchées de x, dans l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$....

2,089....2,09467....2,094549....2,0945515...etc.

On ne pourroit, ainsi que l'a prouvé M. Lagrange, employer généralement cette méthode d'approximation pour chacune des racines réelles d'une équation quelconque, qu'autant que l'on connoîtroit d'avance une valeur approchée de cette racine, telle que la différence entre cette valeur et la vraie valeur de la racine fût moindre en quantité, c'est-à-dire, abstraction faite des signes, que la différence entre la même valeur et chacune des autres racines, et en même temps moindre que la racine quarrée de chacun des produits des racines imaginaires correspondantes, s'il y en a, diminuées de la même valeur. Autrement, cette méthode ne sert qu'à trouver la plus grande et la plus petite des racines réelles; encore faut-il que le quarré de la plus grande ou de la plus petite racine cherchée soit en même temps plus petit que chacun des produits réels des racines imaginaires correspondantes, et qu'on ait quelque moyen de s'en assurer. [*De la Résolution* etc., pag. 147, 151].

(d) Nous avons indiqué plus haut comment on pourroit se procurer une suite de valeurs approchées de l'inconnue, convergentes en plus. Mais pour éviter des calculs inutiles, on peut, au moyen de quelques opérations ajoutées à celles qui ont donné les équations en ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_ν, obtenir une limite, en plus, de ξ_ν, et par conséquent de toutes les valeurs approchées de ξ, depuis la première jusqu'à la $\nu^{ième}$. Nous prendrons d'abord un exemple particulier, et nous traiterons ensuite ce sujet d'une manière générale.

Dans l'exemple qui nous a servi, on a trouvé $\frac{1}{165925}$ ou $\frac{1}{25.6637}$, pour la valeur de π_3, c'est-à-dire, de la limite, en moins, de ξ_3. Faisant donc $\xi_3 = \frac{1}{25.6637}\xi'_3$, et calculant les équations en ξ'_3, (ξ'_3-1), (ξ'_3-2), on trouve pour les coefficiens des équations....

en (ξ'_3-1)...1331 + 1387721049 + 408998623104907 − 12049759756
en (ξ'_3-2)...1331 + 1387723042 + 409001398548998 + 408987931067521.

Puis on fait $10^3(\xi'_3-1) = \xi''_3$; et l'on obtient les coefficiens des équations....

en ξ''_3..........1331 + 1387721049000 + 408998623104907000000 − 12049759756000000000
en (ξ''_3-1)...1331 + 1387721052399 + 408998625880349101993 + 396948864736621050331.

Donc la limite, en plus, de ξ''_3 est....

$$\frac{408998\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{408998\ldots\ldots\ldots\ldots+396948\ldots\ldots\ldots\ldots} \text{ ou } \frac{408998\ldots\ldots\ldots\ldots}{805897\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

On peut donc faire $\xi''_3 < \frac{409}{805}$; et par conséquent....

$$\xi'_3 < 1 + \frac{409}{805000}; \text{ et } \xi_3 < \frac{1}{165925} + \frac{409}{165925.805000}.$$

D'une autre part, on a $\xi_3 > \frac{1}{165925}$.

Donc, en se tenant à cette dernière valeur, l'erreur est moindre que $\frac{409}{165925.805000}$ ou 0,0000000030062....

Bien plus, dans l'exemple qui nous occupe, il suffit de jeter les yeux sur les coefficiens de l'équation en ξ''_3 pour reconnoître qu'on a

$$\xi''_3 < \frac{1}{10}, \text{ et par conséquent } \xi'_3 < 1 + \frac{1}{10000};$$

$$\text{et}\ldots \xi_3 < \frac{1}{165925} + \frac{1}{1659250000};$$

donc l'erreur est moindre que 0,00000000060268r9....

Il suffisoit même de l'équation en $(\xi'_3 - 1)$ pour s'assurer d'un tel résultat, puisqu'à la seule inspection des coefficiens de cette équation, on peut reconnoître que l'on a $\xi'_3 - 1 < \frac{1}{10000}$.

Cette même équation fait voir que $\xi'_3 - 1$ est plus grand que $\frac{1}{41000}$; donc on a

$$\xi'_3 > 1 + \frac{1}{41000}, \text{ et } \xi_3 > \frac{1}{165925} + \frac{1}{165925 . 41000},$$

ou $\quad > 0,0000060268r9\ldots + 0,0000000001469\ldots$

ou bien $\quad > 0,0000060269 6\ldots\ldots$

On a de l'autre part.....

$$\xi_3 < \frac{1}{165925} + \frac{1}{1659250000};$$

ou $\quad < 0,0000060268r9\ldots + 0,0000000006026\ldots$

où bien $\quad < 0,00000602742\ldots$

Ici la différence des deux limites est 0,0000000046....

Donc, si l'on prend une des deux limites pour la valeur de ξ_3, l'erreur ne peut avoir lieu qu'à la dixième décimale.

Ainsi la valeur exacte de x, dans l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, est entre

2,0945514815........et 2,0945514844.....

et même entre...

2,0945514815........et 2,0945514819.....

En prenant le premier de ces nombres, ou l'un des deux derniers, pour la valeur approchée de x, on est assuré que cette valeur est exacte jusqu'à la neuvième décimale, inclusivement, comme nous l'avons annoncé plus haut.

On est également assuré par ce moyen, que les deuxième et troisième valeurs approchées en moins, que nous avons trouvées ci-dessus pour x, sont, respectivement, exactes jusqu'à la seconde et à la quatrième décimale, inclusivement.

La dixième approximation, suivant le procédé de M. Lagrange, a bien donné la huitième décimale exacte, mais l'exactitude de cette décimale n'est pas assurée par le procédé même, vu qu'il indique pour limite de l'erreur, 0,0000000163...; d'où il résulte que la valeur de x est comprise entre....

$$2{,}0945514702 \ldots\ldots \text{ et } 2{,}0945514865 \ldots\ldots$$

et que l'exactitude de la valeur approchée n'est garantie que pour les sept premières décimales.

(e) Voici maintenant comment on peut procéder d'une manière générale.

Soient

$$\xi_{,} = X\,;\ x_{,} = \frac{1}{K}\,;\ \text{et}\ KX = X'.$$

X n'ayant qu'une valeur entre 0 et 1, X' n'en a qu'une seule entre 0 et K.

On se procurera donc les deux transformées en $(X'-P')$ et $(X'-P'-1)$ dont les termes tout connus sont de signes contraires; P' étant $< K$.

Ces deux transformées fournissent déjà une double limite, en plus et moins, pour $(X'-P')$, et par conséquent pour X. Mais pour avoir des limites plus resserrées, on fera...... $10^n(X'-P') = X''$; et comme $(X'-P')$ n'a qu'une seule valeur entre 0 et 1, X'' n'en a qu'une seule entre 0 et 10^n.

On se procurera donc les deux transformées en $(X''-P'')$ et $(X''-P''-1)$ dont les termes tout connus sont de signes contraires; P'' étant $< 10^n$.

Ces deux transformées donneront une double limite, en plus et en moins, de $(X''-P'')$, et par conséquent, de X' et de X.

Soit la limite en moins $= \frac{1}{K^{\circ}}$; et la limite en plus $= \frac{1}{K'^{\circ}}$.

On aura $\quad X' - P' > \frac{1}{K^{\circ}}$, et $< \frac{1}{K'^{\circ}}$;

d'où $\quad X^{\circ} > P^{\circ} + \frac{1}{K^{\circ}}$, et $< P^{\circ} + \frac{1}{K'^{\circ}}$;

et $\quad X' - P' > \frac{P^{\circ}}{10^{\nu}} + \frac{1}{10^{\nu}K^{\circ}}$, et $< \frac{P^{\circ}}{10^{\nu}} + \frac{1}{10^{\nu}K'^{\circ}}$;

d'où X' ou $KX > P' + \frac{P^{\circ}}{10^{\nu}} + \frac{1}{10^{\nu}K^{\circ}}$, et $< P' + \frac{P^{\circ}}{10^{\nu}} + \frac{1}{10^{\nu}K'^{\circ}}$;

et enfin $\quad X > \frac{P'}{K} + \frac{P^{\circ}}{10^{\nu}K} + \frac{1}{10^{\nu}KK^{\circ}} \ldots\ldots$

et $\quad X < \frac{P'}{K} + \frac{P^{\circ}}{10^{\nu}K} + \frac{1}{10^{\nu}KK'^{\circ}}$.

Si l'on prend pour X une de ces deux limites, l'erreur sera moindre que leur différence, qui est $\frac{1}{10^{\nu}K}\left(\frac{K'^{\circ} - K^{\circ}}{K^{\circ}K'^{\circ}}\right)$.

Soit $\nu' + 1$ le nombre de chiffres que renferme le nombre entier K. Il est évident que l'erreur sera $< \frac{1}{10^{\nu+\nu'}}$; d'où il suit que si on veut obtenir, par ce procédé, une valeur approchée, exacte jusqu'à la $n^{ième}$ décimale au moins, il faut, pour en être généralement sûr, prendre $\nu = n - \nu'$.

C'est ainsi que dans l'exemple dont on s'est servi, K ou 165925 étant composé de six chiffres, d'où $\nu' = 5$, on a dû faire $\nu = 5$, si l'on a prétendu avoir une valeur exacte jusqu'à la huitième décimale.

Dans ce même exemple, P° s'est trouvé $= 0$, et $P' = 1$; ce qui a rendu le calcul très-expéditif. En pareil cas, si l'on s'en tient à $\frac{1}{K}$ pour la valeur de X approchée en moins, l'erreur est toujours moindre que $\frac{1}{10^{\nu}KK'^{\circ}}$; et par conséquent $< \frac{1}{10^{\nu+\nu'}}$.

(f) Ce procédé pourroit être étendu à la recherche de plusieurs racines comprises entre deux nombres entiers consécutifs, et l'on tireroit pour lors un assez bon parti du *criterium* que nous avons généralisé dans la note (N). Mais il nous paroît inutile d'entrer dans ces détails. Notre principal objet dans cet Ouvrage, a été de présenter, pour la résolution des équations numériques, une Méthode qui fût praticable, comme *mécaniquement;* la science du calcul pouvant, de même que les arts, avoir ses *manouvriers*, et en tirer, dans des travaux en grand, de notables avantages. Sous ce rapport, notre Méthode générale sera peut-être préférée au procédé particulier que nous donnons ici, surtout si l'on ne veut avoir des racines exactes que jusqu'à la seconde ou troisième décimale.

(g) L'évaluation des racines en fractions continues, suivant le procédé de M. Lagrange, est particulièrement recommandable, lorsqu'elle fait connoître les facteurs commensurables du second degré dans un polynome qu'on se propose de décomposer en facteurs de ce degré. Mais quand il ne s'agit que de la résolution, proprement dite, d'une équation numérique, ce procédé ne nous paroît pas préférable à l'approximation en nombres décimaux, soit pour la commodité des calculs, soit pour la rapidité de l'approximation. De plus, la méthode de M. Lagrange et la nôtre étant de telle nature qu'on y procède simultanément à la vérification et à l'approximation des racines, il semble que c'est surtout à ces deux Méthodes que l'évaluation des racines en fractions continues ne sauroit être généralement convenable. Par exemple, dans celle de l'illustre Géomètre, si le nombre D, ou la limite de la plus petite différence des racines, étoit un millième, il est évident que chaque racine seroit tout à la fois reconnue et appréciée, à moins d'un millième près. Or il paroît infiniment dur, lorsqu'on a obtenu par des milliers de substitutions, une valeur aussi approchée, d'être forcé de rétrograder jusqu'à la valeur du plus grand nombre entier contenu dans cette racine, pour chercher une nouvelle évaluation en fractions continues.

C'est par un semblable motif, joint à quelques autres, que nous n'avons pas cru devoir adapter ce procédé à notre

Méthode ; et ce motif semble plus décisif encore dans la Méthode de M. Lagrange, qui exige un bien plus grand nombre d'opérations pour la manifestation des premières limites des racines. En effet, lorsque D est, par exemple, un millième, on ne peut, suivant la méthode dont il s'agit, découvrir deux racines moindres que l'unité, telles que 0,920... et 0,921..., qu'au moyen de neuf cent vingt-deux substitutions, tandis que le nombre des transformées exigées pour le même objet dans la nouvelle Méthode, égale seulement 10 + 3 + 2, c'est-à-dire, 15. En un mot, s'il faut découvrir une racine ayant *n* décimales, la recherche de ces décimales n'exige au plus que 10.*n* transformations, tandis qu'elle peut exiger jusqu'à 10^n substitutions, suivant la progression 0, D, 2D, etc.

(h) La comparaison que nous venons de présenter, concernant le nombre des opérations, dans la nouvelle Méthode des transformées, et dans la Méthode des substitutions successives, telle qu'elle a été perfectionnée par M. Lagrange, a donné lieu à une observation qu'il est bon de rapporter ici, ne fût-ce que pour empêcher qu'elle ne soit désormais reproduite.

« Si la résolution des équations, a-t-on dit, exigeoit » l'emploi d'une pareille Méthode (*celle de M. Lagrange*), » assurément celle de l'Auteur, quoique très-longue, mériteroit » encore la préférence. Mais, pour l'ordinaire, on ne procède » pas ainsi. La Méthode de Newton, qui est la plus usitée, » suppose qu'on connoît, soit par la voie des substitutions, » soit par des constructions géométriques, une première valeur de *x*, qui approche au moins dix fois plus d'une racine » de l'équation que de toute autre racine ; et d'après cette » valeur, on en trouvera facilement une autre dont l'erreur » n'est qu'environ le quarré de la première, savoir $\frac{1}{100}$, si la » première valeur est $\frac{1}{10}$. Une seconde opération qu'on peut » faire par la même formule, réduit l'erreur du centième à

» son quarré, qui est d'environ [illegible]; et ainsi de suite. D'où » l'on voit que l'approximation continuelle est beaucoup plus » rapide par cette Méthode que par celle que propose l'Auteur. » [*Il s'agit de celle que nous avons exposée au Chapitre VI*].»

Une pareille observation prouve que son Auteur n'a nullement compris l'état de la question. Nous nous sommes proposé de comparer deux Méthodes qui, l'une et l'autre, procèdent simultanément à la vérification et à l'approximation des racines, et qui jouissent, toutes deux, de l'avantage de résoudre généralement et avec certitude, une équation numérique, dans des cas où toutes les Méthodes précédentes échouent, ou n'aboutissent qu'à des résultats faux ou douteux : et l'on vient nous opposer le procédé de Newton, qui n'est pas même une méthode de résolution proprement dite, et qui d'ailleurs, comme nous l'avons dit plus haut d'après M. Lagrange, n'a pas même le mérite d'être généralement sûr ! Ce procédé, fût-il aussi sûr qu'il l'est peu, est évidemment insuffisant pour l'approximation des racines qui, étant par exemple, 8,1...8,2...8,3..., ont une même première valeur connue 8, tandis que, dans notre Méthode, il ne faut que quelques instans pour découvrir la décimale de chacune de ces racines. Et c'est un procédé aussi incertain qu'incomplet qu'on : prétendu opposer à une Méthode générale et sûre !

Encore une fois, nous en appelons à la pratique. Qu'on se donne la peine de résoudre les équations numériques par les diverses Méthodes, et l'on verra qu'abstraction faite du procédé approximatif indiqué dans cette note, notre Méthode générale, même en ne faisant découvrir, qu'un à un, les chiffres de la racine, est encore celle qui, dans son ensemble, se trouve en même temps, la plus sûre et la plus expéditive. Bien plus, dans certains cas, on sera forcé de reconnoître qu'elle est la seule praticable.

Il faut l'avouer, cette observation, que nous avons rapportée *textuellement*, et l'objection citée au n° 48, réunies à quelques autres indices, ont paru provenir d'une disposition d'esprit peu favorable, et nous ont rappelé la pensée de Pascal au sujet de ceux qui inventent. Il faut sans doute, suivant son conseil, que celui qui a rencontré quelques inventions, *ne se pique point* de cet avantage. Quand on considère un objet sous toutes ses faces, avec une attention persévérante, il est difficile qu'il ne se présente pas à l'esprit quelques vues nouvelles; et, ce qui semble réduire à peu de chose cette gloire à laquelle on croit pouvoir prétendre par des inventions scientifiques, c'est que la science même a ses hasards, et que souvent les inventions s'offrent comme fortuitement à l'esprit, à l'instant même où ses recherches le portoient ailleurs. Mais il peut, du moins, être permis à l'auteur d'une découverte utile, de desirer que la communication qu'il en donne, soit accueillie avec quelque bienveillance.

(X) Quoique l'on puisse tirer quelque parti de la nouvelle Méthode pour la détermination des racines imaginaires, nous ne nous arrêterons point à cet objet, qui appartient au problème de la décomposition d'un polynome en facteurs réels du second degré, plutôt qu'à celui de la résolution des équations numériques; l'objet essentiel de cette résolution étant de trouver les valeurs réelles qui peuvent être attribuées à l'inconnue. C'est ce qu'a reconnu M. Lagrange, lorsqu'il a donné des moyens de trouver une limite de la plus petite différence des racines, sans recourir à l'équation aux quarrés de leurs différences.

Cependant l'illustre auteur a cru pouvoir surabondamment se servir de cette équation, qui donne la valeur de la quantité B précédée du signe — sous le radical dans les racines imaginaires, pour déterminer, au moins par approximation, la partie réelle de ces racines. Pour cela on substitue $A+\sqrt{-B}$ à x, dans la proposée, et on en tire deux équations en A, dont l'une a tous ses termes réels, et dont l'autre a tous ses termes multipliés par $\sqrt{-B}$, facteur commun que l'on fait disparoître; ce qui rend les termes de la seconde équation tous réels, parce qu'ils ne dépendent alors, ainsi que ceux de la première, que du quarré de $\sqrt{-B}$, c'est-à-dire, de $-B$.

Ensuite, procédant à la recherche du plus grand commun diviseur de ces deux équations, on s'arrête au reste où A n'est plus qu'au degré *n* et au-dessous, *n* étant le nombre des valeurs égales que l'équation au quarré des différences a fournies pour B. Ce reste étant égalé à zéro, on y substitue à B sa valeur exacte ou approchée, et cette équation étant ainsi devenue numérique, on en tire les valeurs réelles de A.

Cette résolution a, comme l'on voit, l'inconvénient d'exiger la formation de l'équation aux quarrés des différences; mais en outre, il semble qu'on puisse douter qu'elle soit *généralement* exacte dans les cas où le plus grand commun diviseur est de plusieurs dimensions. Car la substitution de la valeur approchée de B ne donnant aux coefficiens de l'équation en A qu'une valeur approchée, ne peut-il pas arriver que cette altération, même très-légère, change la nature des racines de l'équation, en substituant des racines imaginaires à des racines réelles, *et vice versâ*?

Lorsque le reste égalé à zéro est seulement du premier degré, et qu'on a ainsi déterminé la valeur de A en fonction de B, il semble qu'en y donnant à B deux valeurs respectivement approchées en plus et en moins, il en doit provenir deux limites entre lesquelles se trouve la valeur exacte de A. Cependant le résultat même obtenu par M. Lagrange, dans la résolution de l'équation $x^3-2x-5=0$, est évidemment fautif. D'après ce résultat, la valeur de A seroit comprise entre $-\frac{15}{16}$ et $-\frac{15}{18}$. [*De la Résolution* etc., pag. 59]. Or on a vu plus haut que la racine positive de l'équation est bien certainement 2,0945...; et son second terme ayant zéro pour coefficient, il s'ensuit avec la même certitude, que A égale la moitié de cette racine positive, précédée du signe $-$; on voit donc que la valeur exacte de A est comprise entre $-1,047\ldots$ et $-1,048\ldots$ Ce résultat n'est nullement d'accord avec le précédent ; ce qui vient apparemment de quelque erreur de calcul.

L'observation que nous avons faite sur le changement possible de la nature des racines d'une équation par une légère altération dans la valeur de ses coefficiens, peut aussi inspirer quelque doute sur la légitimité de la résolution de deux équations à deux inconnues x et y, lorsqu'après l'élimination de x, on obtient pour y une valeur seulement approchée, dont la substitution ne peut produire que des coefficiens d'une valeur approchée pour l'équation en x. La même difficulté se rencontre dans la décomposition d'un polynome en facteurs du second degré.

D'une autre part, il seroit extrêmement fâcheux de ne pouvoir, en aucun cas, se fier aux résultats qu'on obtiendroit d'une équation numérique, propre à résoudre un problême physico-mathématique, lorsqu'on n'a point la valeur rigoureuse de ses coefficiens. Il est donc à desirer que l'on trouve quelque règle certaine qui fasse connoître quelles sont les équations dont les racines ne changent point de nature, malgré l'altération produite dans leurs coefficiens.

(Y) On auroit un grand embarras de moins, si l'on pouvoit découvrir toutes les valeurs réelles de l'inconnue, sans dépouiller l'équation des racines égales qu'elle peut avoir. On a vu que, dans notre Méthode [46], la présence des racines égales commensurables ne forme point un obstacle à la résolution d'une équation ; et il est aisé d'appercevoir que la présence des racines égales imaginaires n'en forme pas davantage. Bien plus, lorsqu'on sait d'avance que toutes les racines de l'équation sont réelles, on peut la résoudre, sans qu'elle ait été préalablement dépouillée de ses racines multiples, même de celles qui sont réelles incommensurables. Car une fois qu'on sera parvenu à reconnoître l'existence d'une racine, au moins, entre deux limites qui ne diffèrent que d'une unité décimale de l'ordre que l'on veut, ou qu'exige le problême dont la solution dépend de l'équation à résoudre, il est indifférent, pour la pratique, que la valeur trouvée appartienne à une ou à plusieurs racines, soit absolument égales entr'elles, soit égales seulement jusqu'à tel chiffre demandé. L'essentiel est que l'on connoisse toutes les valeurs réelles qui représentent, jusqu'au degré requis d'exactitude, celles dont l'inconnue de l'équation est susceptible.

D'après cette considération, on pourroit même, dans tous les cas, laisser subsister les racines égales d'une équation numérique, si l'on avoit le moyen de connoître une limite, en moins, de la valeur de φ, c'est-à-dire, de la plus petite valeur que pourroit avoir la partie des racines imaginaires représentées par $A \pm \sqrt{-\varphi}$, précédée du signe $-$ sous le signe $\sqrt{}$.

En effet, lorsque l'existence d'une couple de variations dans la collatérale en $(z_{,} - 1)$ a donné lieu de présumer qu'il y a une couple de racines réelles entre 0 et 1, dans l'équation en $(x - p)$, et qu'on est ensuite parvenu à l'équation en...... $(x^{(n)} - p^{(n)})$ et à sa collatérale, sans que cette présomption soit détruite, on en peut conclure que la présomption se change en certitude, quand on sait d'ailleurs que, si les deux racines qui occasionnent les variations dont il s'agit étoient des imaginaires de la forme $A \pm \sqrt{-\varphi}$, la valeur de φ seroit, d'après sa limite en moins, plus grande que $\frac{1}{4 \times 10^{2n}}$; car, dans ce cas, l'existence de ces racines imaginaires devroit se manifester par l'équation collatérale en $(z^{(n)}_{p^{(n)}} - 1)$, qui n'auroit point de variations de signe, et la présomption de l'existence des racines réelles entre p et $p + 1$ devroit être ainsi détruite [66].

Or il paroît qu'en substituant $\sqrt{-\varphi}$ à l'inconnue de l'équation en $\left(x - p - \frac{p'}{10} \ldots - \frac{p^{(n)}}{10^n}\right)$, on peut déterminer une limite de la plus petite valeur dont φ soit susceptible, la valeur de la partie réelle A étant supposée exister entre...

$$p + \frac{p'}{10} + \ldots + \frac{p^{(n)}}{10^n} \text{ et } p + \frac{p'}{10} + \ldots + \frac{p^{(n)} + 1}{10^n}.$$

L'objection qui résulte de la légère altération des coefficiens, se représente ici, mais moins grave que dans la note précédente. Il semble bien que cette altération, toute légère qu'elle puisse être, suffit pour rendre positif, dans l'équation en φ, tel coefficient, qui eût été négatif, si l'on n'avoit pas pris pour A une valeur simplement égale à $p + \frac{p'}{1} + \ldots + \frac{p^{(e)}}{10^e}$; ou bien, *vice versâ*. Mais cet inconvénient ne paroît devoir conduire qu'à l'obligation de modifier la manière de déterminer la limite, en moins, des racines d'une équation numérique. Cette manière dépend, comme on sait, de celle de trouver la limite, en plus, des racines de l'équation inverse. C'est donc cette dernière détermination qu'il faudra modifier, en prenant le plus grand de tous les coefficiens de cette équation, au lieu du plus grand coefficient de signe contraire à celui de son premier terme. Au surplus, nous n'entendons donner ici qu'un simple apperçu, concernant la possibilité de conserver les racines égales dans la nouvelle Méthode.

(Z) On voit que nous nous sommes frayé une route bien différente de celle qui a été tracée par l'illustre Auteur du *Traité de la Résolution des Equations numériques*. Mais c'est en nous fortifiant par la lecture de ses écrits, que nous avons appris à marcher seuls, et nous nous plaisons à lui rendre ici cet hommage.

Tout en recommandant aux Auteurs de son temps, la lecture assidue des écrits des Grecs......

(Vos exemplaria græca
Nocturnâ versate manu, versate diurnâ),

Horace ne savoit pas mauvais gré aux Ecrivains de Rome de ne pas se traîner servilement sur les pas de leurs Maîtres, et d'oser aussi marcher dans leurs propres voies.....

Nec minimum meruêre decus vestigia græca
Ausi deserere.. ..

FIN.

TABLE.

NOTES.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

Page 30, avant-dernière et dernière lignes,.....

au lieu de... $\frac{1 + 9 + 14 - 1}{1 + 18 + 35 + 23}$,

mettez..... $\frac{1 + 9 + 20 - 1}{1 + 18 + 41 + 29}$.

Page 36, lig. 4 en remontant, au lieu de..... *plus de permanences*, mettez *permanences*.

Page 39, lig. 15, au lieu de $+ 6 - 12$, mettez $+ 6x - 12$.

Page 44, ligne 2, au lieu de $- 0$, mettez $= 0$.

Page 45, ligne 4, au lieu de x', mettez $\overset{2}{x'}$.

Page 47, ligne 15, au lieu de *n'est pas*, mettez *est*.

Ibid., ligne 3 en remontant, au lieu de $\frac{x^{n}}{10}$, mettez x^{n}.

Page 48, ligne 9, au lieu de $\frac{1}{4 \times 10^{n}}$, mettez $\frac{1}{4 \times 10^{n(n-1)}}$.

Page 54, ligne 7, au lieu de *valeurs*, mettez *racines*.

Page 58, ligne 4, au lieu de *entre* et 1, mettez *entre zéro et* 1.

Page 65, ligne 8, au lieu de $\frac{P}{10}$, mettez $\frac{P'}{10}$.

Ibid., ligne 17, au lieu de p^{n}, mettez $p^{(n)}$.

Page 66, ligne 2, avant A_{n-2}, mettez $+$.