CHAPITRE VI.

Fin de l'exposition de la nouvelle Méthode. Troisième Partie.

59. LORSQU'ON sait avec certitude que la proposée a une ou plusieurs racines comprises entre p et $p+1$, il reste à trouver une valeur exacte de ces racines jusqu'au $n^{ième}$ chiffre décimal; et quand on a lieu seulement de présumer leur existence, il reste à opérer la vérification de ces racines douteuses. Un même procédé va remplir ce double objet; c'est-à-dire que la méthode d'approximation pour les racines déjà connues, sera en même temps une méthode de vérification et d'approximation pour celles qui ne sont que soupçonnées.

60. Soit qu'on ait la certitude que l'équation en $(x-p)$ a quelque racine comprise entre 0 et 1, soit qu'on se trouve seulement autorisé à le soupçonner, on fait $10(x-p)=x'$. Autant $x-p$ a de valeurs entre zéro et un, autant x' en doit avoir entre zéro et dix. Il faut donc, au moyen des transformées en $(x'-1)$, $(x'-2)$, etc., jusqu'à celles en $(x'-10)$ tout au plus, chercher les racines que l'équation en x' a ou peut avoir entre 0 et 10.

On se comporte dans cette recherche comme dans celle des racines de l'équation en x; et l'on parvient de cette manière, soit à trouver la première décimale des racines dont la partie exprimée en nombre entier p est déjà connue; soit à reconnoître et à vérifier, à moins d'un dixième près, l'existence des racines comprises entre p et $(p+1)$, qui jusques-là étoit douteuse, et qui cesse de l'être, parce-que ces mêmes racines ne se trouvent point comprises ensemble entre $\left(p+\frac{p'}{10}\right)$ et $\left(p+\frac{p'+1}{10}\right)$, les différences de ces racines entr'elles pouvant d'ailleurs être indéfiniment moindres que $\frac{1}{10}$; soit encore à détruire la présomption occasionnée par des racines imaginaires $f\pm\sqrt{-\varphi}$, dans le cas où le *criterium* ou moyen d'exclusion mentionné dans la seconde Partie [53], s'est trouvé en défaut [57].

61. On parvient, disons-nous, à détruire ce soupçon à l'aide des équations en $(x'-p')$ et en $(z'_{\prime}-1)$, toutes les fois au moins que le centuple de la fraction φ est égal ou supérieur à $\frac{1}{4}$; ou, ce qui revient au même, toutes les fois qu'on n'a pas $\varphi<\frac{1}{400}$, ou bien $\varphi<0{,}0025$.

Pour s'assurer de ceci, il ne faut que faire attention à l'équation $10(x-p)=x'$. Lorsqu'une valeur imaginaire de $(x-p)$ est $f\pm\sqrt{-\varphi}$, la valeur correspondante de x' est $10f\pm\sqrt{-100\varphi}$, et celle de $(x'-p')$ est...... $(10f-p')\pm\sqrt{-100\varphi}$, ou bien $f'\pm\sqrt{-100\varphi}$, si l'on fait $10f-p'=f'$. On raisonnera donc pour l'équation en $(z'_{\prime}-1)$, comme on a fait ci-dessus pour celle en $(z_{\prime}-1)$ [58].

62. Ce qui précède va s'éclaircir par l'exemple suivant.

Soit à résoudre l'équation....

$$X^3 - 51X^2 + 761X - 2655 = 0\,;$$

ou bien, X étant égalé à $10x$, soit proposée cette autre équation....

$$x^3 - 5{,}1x^2 + 7{,}61x - 2{,}655 = 0.$$

L'équation n'ayant point de permanence de signe, n'a point de racine réelle négative.

Coefficiens des équations....

en x..........$1 - 5{,}1 + 7{,}61 - 2{,}655$...en $(z-1)$...$2{,}655 + 0{,}355 - 2{,}155 - 0{,}855$
en $(x-1)$...$1 - 2{,}1 + 0{,}41 + 0{,}855$...en $(z_{\prime}-1)$...$0{,}855 + 2{,}975 + 1{,}285 + 0{,}165$
en $(x-2)$...$1 + 0{,}9 - 0{,}79 + 0{,}165$...en $(z_{\prime\prime}-1)$...$0{,}165 - 0{,}295 - 0{,}185 + 1{,}275$
en $(x-3)$...$1 + 3{,}9 + 4{,}01 + 1{,}275$.

Donc zéro est admis comme racine approchée, à moins d'une unité près; le nombre 1 est exclus; le nombre 2 est à vérifier.

Pour l'approximation de la racine admise, soit $10x = x'$, $\frac{1}{x'} = z'$, etc.

Coefficiens des équations....

en x'..........$1 - 51 + 761 - 2655$
en $(x'-1)$....$1 - 48 + 662 - 1944$
en $(x'-2)$....$1 - 45 + 569 - 1329$
en $(x'-3)$....$1 - 42 + 482 - 804$
en $(x'-4)$....$1 - 39 + 401 - 363$
en $(x'-5)$....$1 - 36 + 326 + 0$.

Donc $x' = 5$; d'où $x = 0{,}5$.

N. B. On voit que les équations collatérales en $(z'-1)$, $(z'_{\prime}-1)$, etc. sont inutiles dans cette circonstance, parceque la transformée en $(z-1)$ n'ayant qu'une variation de signe, il s'ensuit que x' ne peut avoir qu'une seule valeur entre 0 et 10, x n'en pouvant avoir qu'une entre zéro et un [53].

Pour la vérification des racines douteuses, soit.....
$10(x-2)=\overset{2}{x}{}'$, $\frac{1}{\overset{2}{x}{}'}=\overset{2}{z}{}'$, etc.

Coefficiens des équations...

en $\overset{2}{x}{}'$.........$1+9-79+165$.....en $(\overset{2}{z}{}'-1)$....$165+416+346+96$
en $(\overset{2}{x}{}'-1)$....$1+12-58+96$.....en $(\overset{2}{z}{}'_1-1)$.... $96+230+184+51$
en $(\overset{2}{x}{}'-2)$....$1+15-31+51$.....en $(\overset{2}{z}{}'_2-1)$.... $51+122+165+36$
en $(\overset{2}{x}{}'-3)$....$1+18+2+36$.

Donc $\overset{2}{x}{}'$ n'a pas de valeur réelle positive; donc 2 est exclus, et l'équation est résolue.

63. *Autre exemple*.... $x^5-3x^4-3x^3+7x^2+8x+2=0$.

Coefficiens des équations...

en x..........$1-3-3+7+8+2$...en $(z-1)$... $2+18+59+86+54+12$
en $(x-1)$...$1+2-5-10+6+12$...en (z_1-1)...$12+66+134+121+46+6$
en $(x-2)$...$1+7+13-3-6+6$...en (z_2-1)... $6+14-7-52-10+2$
en $(x-3)$...$1+12+51+88+50+8$.

Coefficiens des équations...

en $x=-x$...$1+3-3-7+8-2$...en $(z-1)$...$2+2-5-4+1+0$
en $(x-1)$....$1+8+19+12+2+0$.

Donc une des valeurs de x est -1, et les transformées collatérales ne permettent de soupçonner d'autres racines réelles qu'entre 2 et 3 et entre 0 et -1.

Pour la vérification des racines douteuses positives, soit $10(x-2)=x'$, ou $x=2+\frac{x'}{10}$. On obtient l'équation en x' par une addition convenable de zéros dans les coefficiens de l'équation en $(x-2)$.

Coefficiens des équations....

en x' . . . . $1 + 70 + 1300 - 3000 - 161000 + 600000$
en $(x'-1)$ . . . . $1 + 75 + 1590 + 1330 - 161815 + 438371$
en $(x'-2)$ . . . . $1 + 80 + 1900 + 6560 - 154080 + 279552$
en $(x'-3)$ . . . . $1 + 85 + 2230 + 12750 - 134935 + 134013$
en $(x'-4)$ . . . . $1 + 90 + 2580 + 19960 - 102400 + 14145$
en $(x'-5)$ . . . . $1 + 95 + 2950 + 28250 - 54375 - 65625$
en $(x'-6)$ . . . . $1 + 100 + 3340 + 37680 + 11360 - 83704$
en $(x'-7)$ . . . . $1 + 105 + 3750 + 48310 + 97145 - 36223$
en $(x'-8)$ . . . . $1 + 110 + 4180 + 60200 + 205440 + 113088$.

Donc x' a deux valeurs, l'une entre 4 et 5, l'autre entre 7 et 8; et parconséquent les racines positives de x sont, à moins d'un dixième près, 2,4 et 2,7.

N. B. L'équation en $(z_{\circ} - 1)$ ou $\left(\frac{1}{x-2} - 1\right)$ n'ayant que deux variations de signe, ne peut avoir que deux racines positives [53], et parconséquent $(x - 2)$ ne peut avoir plus de deux valeurs entre 0 et 1, ni x' plus de deux valeurs entre 0 et 10: les transformées successives faisant ici connaître ces deux valeurs, il est inutile de calculer les collatérales.

Pour la vérification des racines négatives qui peuvent être comprises entre 0 et 1, on fera $10\,x = x'$, et par les transformées successives en $(x' - 1)$, $(x' - 2)$, etc., on trouvera deux valeurs pour x', comprises respectivement entre 4 et 5, et entre 7 et 8. D'où il suit que les racines négatives de x sont $-0,4$ et $-0,7$, à moins d'un dixième près.

64. Les équations en $(x' - p')$ et en $(z'_{\prime} - 1)$ peuvent n'être pas suffisantes pour déterminer l'admission ou le rejet de la totalité des racines douteuses. Alors on a recours aux équations en $(x'' - p'')$ et en $(z''_{\prime} - 1)$, qu'on obtient

en faisant $10(x'-p')=x''$, $\frac{1}{x'-p'}=z'_{p'}$, et en procédant comme on a fait ci-dessus pour les équations en $(x'-p')$ et en $(z'_{p'}-1)$.

Par ce moyen on approche, jusqu'à la seconde décimale inclusivement, des racines dont l'existence est déjà reconnue, en même temps que l'on découvre les racines réelles jusques-là douteuses, qui étant comprises entre $\left(p+\frac{p'}{10}\right)$ et $\left(p+\frac{p'+1}{10}\right)$, n'ont point pour communes limites $\left(p+\frac{p'}{10}+\frac{p''}{100}\right)$ et $\left(p+\frac{p'}{10}+\frac{p''+1}{100}\right)$, les différences de ces racines entr'elles pouvant d'ailleurs être indéfiniment moindres que $\frac{1}{100}$.

On détruit aussi, par ce même moyen, le soupçon qui auroit été maintenu dans l'équation en $(x'-p')$ par les imaginaires $f'\pm\sqrt{-100\,\varphi}$, toutes les fois, pour le moins, que $10000\,\varphi$ n'est pas égal ou supérieur à $\frac{1}{4}$; ou, ce qui revient au même, toutes les fois qu'on n'a point $\varphi<\frac{1}{40000}$, ou bien $\varphi<0{,}000025$. Les raisonnemens sont ici les mêmes qu'aux numéros 58 et 61.

65. S'il reste encore à vérifier des racines présumées, ou si l'on veut pousser l'exactitude des racines découvertes jusqu'à la troisième décimale inclusivement, on voit comment la vérification et l'approximation se continueront par les équations en $(x''-p'')$ et en $(z''_{p''}-1)$ qu'on obtient en faisant $10(x'-p')=\frac{x''}{10}$, et $\frac{1}{x''-p''}=z''_{p''}$.

66. En procédant de la sorte, au moyen des équations en $(x'''-p''')$, en $(x^{v}-p^{v})$, etc. etc., s'il y a lieu, on finit

par déterminer quelles sont, parmi les racines présumées de l'équation proposée en x, celles qui doivent être admises et celles que l'on doit exclure. Généralement, on n'est dans le cas de recourir à l'équation en $(x^{(n)}-p^{(n)})$, qu'autant qu'on veut avoir des racines exactes jusqu'à la décimale $n^{ième}$ inclusivement, ou que la proposée a des racines imaginaires dont la partie réelle n'est pas un nombre entier, et dont la partie précédée du signe — sous le signe $\sqrt{\ }$, est moindre que $\frac{1}{4\times 10^{n}}$; encore, dans la seconde circonstance, ce recours n'est-il pas toujours nécessaire.

Nous sommes donc arrivés, par notre Méthode, au but que nous nous sommes proposé, qui est de trouver exactement, jusqu'à telle décimale qu'on voudra, les seules valeurs réelles qui puissent être assignées à l'inconnue d'une équation numérique d'un degré quelconque; et nous y sommes parvenus par le seul emploi des deux premières règles de l'Arithmétique. La pratique étant la pierre de touche de la commodité des diverses méthodes, nous desirons que nos Lecteurs s'exercent à résoudre les mêmes équations numériques par la nôtre et par celles qui l'ont précédée; qu'ils résolvent, par exemple, l'équation du cinquième degré du n° 63, et celles du quatrième degré du n° 55.

NOTES.

Sur le CHAPITRE I[er].

(A) Nous avons dit, au sujet du procédé que M. Lagrange a proposé pour corriger la méthode des substitutions successives, qu'il pouvoit donner lieu, en certains cas, à des milliers, et même à un nombre indéfiniment plus grand, d'opérations superflues. Soit, par exemple, une équation du quatrième degré ayant une de ses racines entre o et 1; une autre racine entre 1 et 2; une troisième égale à 4, moins un demi-millionième; et, pour dernière racine, 4, plus un demi-millionième (on prend ici, pour plus grande commodité, une fraction rationnelle). Dans ce cas, la limite de la plus petite différence des racines sera moindre qu'un millionième. Donc si l'on fait $D < \frac{1}{1000000}$ dans la progression arithmétique o, D, 2D, 3D, etc., le nombre des termes à substituer devra s'élever à plus de quatre millions; tandis que cette même équation peut se résoudre par la seule substitution des nombres o, 1, 2, 3, 4 et 5. Cette extrême multiplicité de substitutions est donc un *luxe* infiniment onéreux; et l'on auroit, généralement, plus tôt fait d'employer successivement, pour les substitutions, au lieu de la série o, D, 2D, 3D, etc., la série des unités simples; puis, en cas d'insuffisance, celle des dixièmes; puis encore celle des centièmes, et ainsi de suite.

Ce parti seroit préférable, lors même qu'on seroit tenu, en l'adoptant, d'opérer la substitution des nombres de chaque série compris entre chaque terme de la série précédente et le terme suivant, c'est-à-dire, de substituer les dixièmes compris entre 0 et 1, entre 1 et 2, entre 3 et 4, et ainsi de suite sans exception, etc. A plus forte raison, ce mode de substitution doit-il être préféré lorsqu'on a trouvé le moyen de se dispenser de la plupart de ces intercalations ou substitutions intermédiaires, ainsi que cela se rencontre dans notre Méthode.

Par le même motif, dans une équation dont la plus grande racine paroîtroit susceptible de renfermer dans sa valeur des dixaines, ou des centaines, etc., on devroit employer, pour les premières substitutions, la série des dixaines, ou celle des centaines, etc. Les termes de chacune des progressions arithmétiques qu'il conviendroit d'employer successivement, peuvent être représentés d'une manière générale par 0, 10^n, 2.10^n, 3.10^n, etc.; n étant un nombre entier positif, ou zéro, ou un nombre entier négatif. On doit commencer par la substitution des termes de la progression dont la différence 10^n est la puissance de 10 immédiatement inférieure à la limite de la plus grande racine positive. Si cette limite, par exemple, étoit comprise entre cent et mille, la différence de la première progression à employer seroit 10^2. La dernière progression à laquelle on puisse être dans le cas de recourir, est celle dont la différence est la puissance de 10 immédiatement inférieure à D; mais on pourra souvent, ainsi que nous l'avons fait observer, se trouver dispensé d'en venir à cette progression, et même à plusieurs de celles dont l'emploi doit précéder le sien. L'exemple allégué au commencement de cette note en est une preuve sensible. Quoique les puissances de tout autre nombre que 10 pûssent être prises pour les différences respectives de ces progressions, ce dernier nombre doit, en général, être adopté de préférence, à cause de la facilité des calculs, qui résulte de ce qu'il est la base du système de numération usité.

Si les quatre premières racines d'une équation proposée, du sixième degré, étoient des imaginaires dont la partie réelle fût un nombre entier positif moindre que 3, les deux dernières racines restant les mêmes que ci-dessus, c'est-à-dire, $4-\frac{1}{1000000}$ et $4+\frac{1}{1000000}$; alors les quatre millions, et plus, de substitutions à opérer, seroient rigoureusement nécessaires pour la résolution de l'équation, selon la méthode de M. Lagrange ; et cette dure nécessité est encore un inconvénient extrêmement grave. Pour résoudre une semblable équation, à moins d'une unité près, suivant la nouvelle méthode, il ne faut que quelques minutes.

(B) En parlant du fameux théorême de Descartes, l'illustre Auteur du Traité de la Résolution des Equations numériques y rappelle que les Anglois attribuent cette règle à leur compatriote Harriot. Il est vrai que Descartes, de son vivant même, fut accusé, par les Anglois, de cette espèce de plagiat, comme ils ont formé depuis une semblable imputation contre Leibnitz. Mais en rappelant cette accusation surannée, qui n'a point empêché que le théorême dont il s'agit n'ait été constamment appelé *la Règle de Descartes*, il est juste aussi d'observer qu'elle a été detruite par plusieurs Auteurs du dix-septième siècle. Le P. Prestet, dans ses Elémens imprimés en 1689, provoque, à ce sujet, la comparaison des écrits d'Harriot avec ceux de Descartes. « Lorsque M. Wallis, dit-il, un peu trop » jaloux de la gloire que la France s'est acquise dans les » Mathémathiques, vient renouveler cette accusation ridicule, » on est en droit de ne le point croire, puisqu'il parle sans » preuves. M. Hudde, hollandois, qui n'est point suspect, puis» qu'il n'avoit aucun intérêt à soutenir l'honneur des auteurs » françois, est bien plus équitable dans le jugement qu'il porte » de M. Descartes ».

Sur le CHAPITRE II.

(C) Les deux propositions, dont dépend l'Algorithme du chapitre second, nous avoient paru nouvelles. Mais nous ne devons pas taire que M. Legendre, dans son rapport sur une partie de notre travail, en a jugé autrement. Suivant lui, « ces » deux théorêmes que l'Auteur regarde comme nouveaux, ne » sont que *l'énoncé de propriétés déjà connues*, relatives à » la sommation des suites, et ce qui lui appartient se réduit » à l'Algorithme propre à opérer les transformations ».

Si l'on considère que le second de ces théorêmes et l'Algorithme ne sont qu'une seule et même chose, on aura sans doute quelque peine à comprendre que l'un appartienne à l'Auteur, si l'autre ne lui appartient pas. Peut-être le Rapporteur se seroit-il exprimé avec plus de justesse et de *justice*, s'il eût dit que ces deux propositions, jusqu'ici inconnues, sont des conséquences si faciles à déduire des principes déjà reçus, qu'il peut paroître étonnant qu'on ne s'en soit pas avisé plus tôt. Peut-être du moins, auroit-il mieux valu que M. Legendre, en niant la nouveauté de ces propositions, ne se fût pas borné à cette simple négation, et qu'il eût bien voulu indiquer en quel ouvrage, élémentaire ou non, elles se trouvent consignées. Quoi qu'il en soit, d'après l'imposante autorité du savant Rapporteur, on conçoit qu'il est inutile de s'arrêter ici à prouver *des propriétés connues*.

(D) L'Algorithme indiqué au n° 26, pourroit être employé à la recherche directe des racines négatives; mais il nous a paru plus simple et plus commode de ramener cette recherche, comme on a coutume de faire, à celle des racines positives et d'employer, à cet effet, notre Algorithme ordinaire.

(E) L'Algorithme du second chapitre, en perdant un peu de sa simplicité, peut s'étendre au calcul de la transformée en $\left(x-\frac{n}{d}\right)$, d n'étant plus seulement une puissance de 10, mais un nombre entier quelconque. Il faut, pour cela, faire $x=\frac{x'}{d}$, et, pour avoir les coefficiens de l'équation en x', multiplier respectivement ceux de l'équation en x, à compter de celui de x^m, par d^0, d^1, d^2,... d^m. Ensuite, par de simples additions et soustractions, on se procure [n^{os} 22, 24, 25] la transformée en $x'-n$, dont les coefficiens, à compter de celui de la plus haute puissance, respectivement divisés par d^0, d^1, d^2,... d^m, deviennent ceux de l'équation en $\left(x-\frac{n}{d}\right)$. Par ce procédé, le nombre des multiplications et divisions est diminué, autant qu'il se peut.

Sur le CHAPITRE III.

(F) On a vu [n° 35] comment on peut déterminer une limite, en moins, de la plus petite valeur positive, et une limite, en plus, de la plus grande valeur que puisse avoir l'inconnue d'une équation. Mais il est une remarque qui n'a pas encore été faite, c'est qu'on peut déterminer deux limites semblables pour les valeurs réelles qu'une équation peut avoir entre zéro et un; et voici comment.

Pour obtenir une limite moindre que la plus petite racine; on use du même procédé qu'au n° 35; c'est-à-dire, on prend le quotient du dernier terme divisé par la somme de ce même terme et du plus grand coefficient précédé d'un signe contraire : ce quotient donne nécessairement une fraction pour limite de la plus petite racine positive.

La limite de la plus grande racine qui puisse être comprise entre zéro et un, se découvre à l'aide de la transformée en $(x-1)$, après qu'on a changé les signes de ses coefficiens de rang pair : le plus grand coefficient de cette équation, ainsi modifiée, de signe contraire à celui de son dernier terme, étant divisé par la somme de ce coefficient et du dernier terme, le quotient est une fraction dont la valeur surpasse celle de la plus grande racine que la proposée en x puisse avoir entre 0 et 1. Cette fraction est le complément, à l'unité, de celle qui exprime la limite de la racine la plus voisine de zéro, que l'équation en $(x-1)$ puisse avoir entre 0 et -1. Avec un peu de réflexion, on apperçoit aisément la raison de ceci.

On jugera, par la suite de ces Notes, de quelle importance peut être cette remarque.

Sur le CHAPITRE IV.

(G) PARMI les cas susceptibles d'être résolus par la première partie de la nouvelle Méthode, on a compté celui où la proposée n'a ni racines imaginaires, ni plusieurs racines réelles comprises entre deux nombres entiers p et $p+1$. Il peut néanmoins se présenter alors une difficulté, provenant de la présence des racines commensurables dans l'équation : en voici un exemple avec le moyen d'y obvier. Soit l'équation...

$$x^3+x^2-3x+1=0;$$

on a les coefficiens des équations....

en x..............$1+1-3+1$
en $(x-1)$.........$1+4+2+0$.

Dans cette circonstance où la proposée a l'unité pour racine, il se pourroit qu'il y eût une autre racine entre zéro et un, dont l'existence ne seroit point manifestée par le dernier terme. Si cette racine existe en effet, on s'en assurera en prenant la somme des trois premiers termes de la proposée $1+1-3$, laquelle somme égalant -1, est de signe contraire au troisième terme $+2$, de la transformée en $(x-1)$, et par conséquent, atteste l'existence d'une racine entre 0 et 1.

La raison de ceci est que, dans ce cas, l'équation du deuxième degré qui résulte de la division de la proposée par $x-1$, a pour ses coefficiens respectifs les sommes-premières des coefficiens de la proposée, à commencer du premier jusqu'au troisième. Ces sommes étant 1, 2, -1, l'équation du second degré est....

$$x^2+2x-1=0,$$

dont la transformée en $(x-1)$ est....

$$(x-1)^2+4(x-1)+2=0.$$

Cette opération seroit inutile, si l'on savait d'avance que la proposée n'a point de racines imaginaires, la simple comparaison des signes de cette équation avec ceux de sa transformée étant alors suffisante pour manifester l'existence de la racine entre et 1.

Quoique l'exemple employé dans cette note, soit celui d'une équation en x du troisième degré, dont la transformée en $(x-1)$ n'a que son dernier terme égal à zéro, le procédé est général. La proposée étant du degré m, et sa transformée en $(x-1)$ ayant ses n derniers termes égaux, chacun, à zéro, il faut alors prendre la somme des $m+1-n$ premiers coefficiens de l'équation proposée; cette somme est la valeur du dernier terme de l'équation en x du degré $(m-n)$, qui est le même degré auquel la transformée en $(x-1)$ se trouve abaissée par l'égalité à zéro de ses n derniers termes.

(H) Nous n'aurions peut-être pas dû faire mention, au n° 48, de l'objection opposée à la nouvelle Méthode, mais nous savons que cette objection a été faite dans les propres termes que nous avons rapportés; et dès lors il a bien fallu en montrer la frivolité. Quelles sont d'ailleurs ces Méthodes ordinaires qu'on puisse dire *plus expéditives*, et en même temps *aussi sûres*, *aussi générales* que la nôtre ?

Sur le CHAPITRE V.

(I) Outre le *criterium* que nous avons fait connoître [n° 55], il en existe plusieurs autres qui, sans avoir tous les avantages du premier, peuvent souvent en tenir lieu. Un second *criterium* consiste dans ce corollaire aussi important par son utilité que facile à déduire de la remarque que nous avons consignée dans la note (F) :

Une équation n'a point de racine entre zéro et un, lorsque la limite, en moins, de sa plus petite racine, est égale ou supérieure à la limite, en plus, de la plus grande racine qu'elle puisse avoir entre 0 *et* 1.

Soit, pour exemple, la même équation du n° 53...,

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0.$$

Coefficiens des équations....

en x............$1 - 4 + 3 - 6$
en $(x-1)$.....$1 - 1 - 2 - 6$.

Ici la plus petit valeur que x puisse avoir entre 0 et 1, doit ètre supérieure à $\frac{6}{9}$ ou $\frac{2}{3}$; et la plus grande doit être au-dessous de $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$; la contradiction qui se rencontre eutre ces deux conditions fait voir l'impossibilité qu'il y ait des valeurs positives de x au-dessous de l'unité.

(K) A l'aide du *criterium* que nous avons indiqué dans la note précédente, on peut souvent résoudre une équation numérique, sans avoir besoin de recourir aux transformées collatérales.

Prenons pour exemple la même équation....

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0.$$

Coefficiens des équations....

en x..........	$1 - 4 + 3 - 6$
en $(x-1)$....	$1 - 1 - 2 - 6$
en $(x-2)$....	$1 + 2 - 1 - 8$
en $(x-3)$....	$1 + 5 + 6 - 6$
en $(x-4)$....	$1 + 8 + 19 + 6.$

On a déjà vu que x ne peut avoir de valeur entre 0 et 1.

La plus petite racine de l'équation en $(x-1)$ doit surpasser $\frac{6}{7}$, et la plus grande racine positive, inférieure à 1, que cette équation puisse avoir, doit être au-dessous de $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$. La contradiction est évidente. Donc l'équation en $(x-1)$ n'a point de racine positive entre 0 et 1; et par conséquent, celle en x n'en a point entre 1 et 2.

De même, les fractions qu'on voudroit admettre comme racines de l'équation en $(x-2)$, devroient être en même temps au-dessus de $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$, et au-dessous de $\frac{4}{11}$: conditions incompatibles. Donc l'équation en $(x-2)$ n'a pas de racine entre 0 et 1; et par conséquent celle en x n'en a point entre 2 et 3.

L'équation en $(x-3)$ n'a qu'une racine positive qui est manifestée entre 0 et 1; par conséquent x a une valeur positive entre 3 et 4. Et la proposée n'a pas d'autre racine réelle, vu que n'ayant point de permanence de signe, elle n'a point de racine négative, et que l'absence des variations de signe dans la transformée en $(x-4)$ établit le nombre 4 pour limite de la plus grande racine positive de la proposée.

(L) Un troisième *criterium* s'offre encore à nous : *Une équation n'a point de racine entre zéro et un, lorsque la suite formée par les sommes-premières de ses coefficiens pris à rebours, ne présente point de variation de signe.* Cette proposition est une conséquence de notre Algorithme [n° 20]; car il est évident que l'absence des variations de signe dans cette suite, entraîne cette même absence dans la transformée collatérale.

Ainsi dans la même équation qui vient de nous servir d'exemple, les coefficiens pris à rebours étant....

$$-6+5-4+1,$$

les sommes-premières sont...$-6-3-7-6$;

d'où il suit que l'équation en x n'a point de racine entre o et 1.

Ce *criterium* s'applique pareillement aux deux transformées de cette équation en $(x-1)$ et en $(x-2)$. L'opération qu'il exige peut souvent se faire mentalement, et même d'un coup-d'œil, comme cela se trouve dans le cas pris pour exemple; ce qui rend ce *criterium* très-commode.

(M) Il est encore d'autres circonstances où l'on peut se dispenser de calculer les transformées collatérales.

Lorsque les transformées successives en $(x-1)$, $(x-2)$, etc. ont fait découvrir autant de racines positives que la proposée a de variations de signe, on voit que les collatérales en $(z-1)$, (z_1-1), (z_2-1), etc. deviennent inutiles. C'est donc surabondamment que ces dernières ont été employées au n° 54, dans la recherche des racines positives de l'équation........ $x^3-2x-5=0$; et au n° 55, dans celle des racines négatives de l'équation $x^4-5x^3+5x^2+6x-12=0$.

Dans la première équation de ce même n° 55, la seule règle de Descartes rendoit inutiles toutes les transformées collatérales, à l'exception de celle en (z_2-1). Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur les signes des coefficiens de cette équation et de ses transformées successives. On en peut dire autant par rapport à l'équation en x du n° 62, et à ses transformées successives. En général, il ne faut point perdre de vue cette règle de Descartes, dont les applications se présentent fréquemment dans la nouvelle Méthode.

Lorsqu'on est parvenu à découvrir $m - 2$ racines réelles d'une équation du degré m, on ne peut supposer que les deux restantes aient des valeurs réelles comprises entre deux nombres entiers p et $p + 1$, si l'équation en $(x - p - 1)$ n'a pas au moins deux permanences de signe de plus que celle en $(x - p)$. Ainsi dans l'équation du n° 46, $x^3 - 7x + 7 = 0$, lors même qu'on ignoreroit que toutes ses racines sont réelles, la seule vue des transformées successives apprendroit qu'il ne faut chercher les deux racines positives de la proposée qu'entre 1 et 2.

(N) Le *criterium* qui est indiqué au n° 53, et que l'on doit considérer comme le plus important, peut être généralisé ainsi : *une équation en* x *ne peut avoir plus de racines comprises entre zéro et* u, *qu'il n'y a de variations de signe dans l'équation en* $\left(z - \frac{1}{u}\right)$; u *représentant une valeur positive quelconque, et* z *égalant* $\frac{1}{x}$.

Sur quoi, il faut observer qu'en faisant $z' = uz$, on a les mêmes variations de signe dans l'équation en $(z' - 1)$ ou $\left(\frac{u}{x} - 1\right)$ que dans celle en $\left(z - \frac{1}{u}\right)$ ou $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{u}\right)$; ensorte qu'il suffit, sous ce rapport, d'obtenir la première.

Ainsi la proposée en x n'aura point de racine entre zéro et u, lorsque la transformée en $(z' - 1)$ ou $\left(\frac{u}{x} - 1\right)$ n'aura que des permanences de signe.

Cette uniformité des signes de la transformée aura constamment lieu, lorsqu'il n'y a aucune valeur de x entre 0 et u, si ce n'est quand la proposée a une ou plusieurs couples de racines imaginaires de la forme $f \pm \sqrt{-\varphi}$, f ayant une valeur positive moindre que celle de u, et φ étant moindre que $f(u - f)$, et par conséquent moindre que $\frac{u^2}{4}$. Ce cas d'exception est le seul qui puisse produire quelque variation de signe dans la transformée en ($z'-1$); encore n'en est-ce pas un effet nécessaire.

Dans ce cas, si $u=1$, f est une fraction, et φ est $<\frac{1}{4}$

Si $u=10$, f est entre o et 10, et φ est $<\frac{10^2}{4}$ ou 25.

Si $u=100$, f est entre o et 100, et φ est $<\frac{100^2}{4}$ ou 2500.

Et généralement, si $u=10^n$, f est entre o et 10^n, et φ est $<\frac{10^{2n}}{4}$ ou $25.10^{2(n-1)}$. Ceci a également lieu lorsque l'exposant n est négatif.

Ces résultats se lient avec ceux des n^os 57, 61, 64; et ce *criterium*, ainsi généralisé, se démontre d'une manière analogue à celle du n° 57 : z' ou $\frac{u}{x}$ est ici $\frac{u}{f\pm\sqrt{-\varphi}}$ ou $\frac{uf\mp\sqrt{-u^2\varphi}}{f^2+\varphi}$; ainsi la partie réelle de $z'-1$ est $\frac{f(u-f)-\varphi}{f^2+\varphi}$; quantité qui ne peut être >0 qu'autant que le nombre f est positif et plus petit que u, et que φ est $<f(u-f)$.

(O) Appliquons ceci à l'équation....

$$x^4-12x^3+58x^2-132x+121=0.$$

Cette équation est la même qui a été résolue au n° 55, à l'aide de ses transformées successives en ($x-1$), etc., et des transformées collatérales en ($z-1$), (z_1-1), etc. Il est aisé de reconnoître [55] que ses racines positives, si elle en a, sont moindres que 3.

Les coefficiens de l'équation inverse en z ou $\frac{1}{x}$ étant...

$$121-132+58-12+1;$$

ceux de l'équation en $z'=3z$ sont...

$$121-3.132+3^2.58\ -3^3.12\ +3^4;$$

ou bien $\quad 121- \quad 396+ \quad 522- \quad 324+81.$

Les coefficiens de l'équation en $(z'-1)$, calculés par l'Algorithme, sont......

$$121+88+60+16+4.$$

Donc la proposée n'a point de racine positive moindre que 3; et comme elle n'en peut avoir qui soit égale ou supérieure à ce nombre, et que l'absence des permanences en exclut toute racine négative, il s'ensuit que l'équation en x n'a point de racines réelles.

L'application de ce *criterium* n'a pas le même résultat dans l'équation suivante....

$$x^3-2,1x^2+0,41x+0,855=0,$$

équation dont la plus grande racine positive, s'il y en a, est ≤ 4.

Les coefficiens de l'équation en $z'=4z=\frac{4}{x}$, sont....

$$0,855+4\times 0,41-16\times 2,1+64,$$

ou bien... $0,855 + 1,64 - 33,6 + 64.$

Ceux de l'équation en $(z'-1)$ sont....

$$0,855+4,205-27,755+32,895.$$

Donc la proposée en x a, soit une couple de racines positives, soit une couple de racines imaginaires dont la partie réelle est entre 0 et 4, et dont la partie précédée du signe $-$ sous le signe $\sqrt{}$ est $<\frac{4^2}{4}$ ou <4.

Si l'on fait attention que les coefficiens de cette proposée sont les mêmes que ceux de la transformée en $(x-1)$ du n° 62, on appercevra aisément que c'est un cas d'exception semblable à celui que présente l'équation en x résolue dans ce numéro.

(P) Le problême de la résolution des équations numériques étant réduit par la nouvelle méthode à la recherche des racines d'une équation comprises entre zéro et un, il est avantageux de multiplier les moyens de reconnoître l'absence de toute racine réelle entre ces deux limites : en voici donc un quatrième.

On prendra la somme des coefficiens de signe contraire à celui du dernier terme; si elle n'est pas plus grande que ce terme, on en conclura évidemment que l'équation n'a pour racine aucune valeur entre o et 1.

Ce moyen si simple, appliqué successivement aux diverses transformées, suffit quelquefois à la résolution d'une équation. Reprenons l'exemple déjà employé....

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0$$

Coefficiens des équations....

$$\begin{array}{lllll}
\text{en } x \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 & -4 & +\ 3 & -6 \\
\text{en } (x-1) \ldots & 1 & -1 & -\ 2 & -6 \\
\text{en } (x-2) \ldots & 1 & +2 & -\ 1 & -8 \\
\text{en } (x-3) \ldots & 1 & +5 & +\ 6 & -6 \\
\text{en } (x-4) \ldots & 1 & +8 & +19 & +6
\end{array}$$

Au premier coup-d'œil jeté sur les coefficiens, on reconnoît à l'aide de ce quat[illegible] que la proposée n'a point de racine réelle entre o et 3; et par la règle de Descartes, on voit que la proposée n'a qu'une racine réelle, comprise entre 3 et 4. Cette seule règle, d'ailleurs, suffisoit pour indiquer l'absence de toute racine réelle entre 1 et 3.

(Q) Si l'essai du moyen précédent n'a pas suffi, on peut aussi prendre la limite, en plus, des valeurs positives que l'équation peut avoir pour racines entre o et 1, en la manière indiquée par la note (F), substituer cette limite à la place de l'inconnue dans les termes de signe contraire à celui du dernier terme, et prendre la somme des termes où la substitution a été faite. Pour que l'inconnue puisse avoir quelque valeur entre o et 1, il faut évidemment que cette somme surpasse la valeur du dernier terme. Ce moyen est d'une application assez facile, quand la limite dont il s'agit est une fraction dont les deux termes n'ont, chacun, qu'un seul chiffre; et il est souvent aisé de s'en procurer une semblable.

(R) Si l'on fait $-(x-1)=\xi$, et par conséquent $-x=\xi-1$, après le changement des signes des termes de rang pair dans les équations en $(x-1)$ et en x, on aura deux équations en ξ et $(\xi-1)$, auxquelles on pourra appliquer les mêmes moyens indiqués dans les notes précédentes, pour manifester l'absence des racines réelles entre zéro et un dans l'équation en ξ, et par conséquent dans celle en x.

(S) Ces divers moyens tendant à diminuer beaucoup le nombre des opérations, ne doivent pas être négligés dans l'usage de la nouvelle Méthode. Néanmoins il pourra paroître convenable de ne point embarrasser les commençans par trop de détails, et de les exercer d'abord à résoudre les équations par les seuls procédés indiqués dans le corps de l'ouvrage.

(T) Un *criterium* d'une plus grande importance est celui qui résultera de la seconde proposition du n° 39, si on l'admet en principe général pour une équation quelconque. « Il arrive » quelquefois dans ces matières, dit Fontenelle, que l'on trouve » de bonnes méthodes, et qu'il n'est pas aisé d'en trouver une » démonstration assez précise ou assez claire. On voit la route » qu'il faut tenir, on voit que l'on arrivera, on arrive tou- » jours; mais à toute rigueur, on pourroit douter, et on ne » forceroit pas un incrédule, triomphe indispensable pour les » Mathématiques ». Et cependant la règle même de Descartes, la théorie des parallèles, et plusieurs autres vérités mathématiques, ont été généralement admises long-temps avant qu'elles aient été rigoureusement démontrées.