

## A P P E N D I C E

### A LA NOUVELLE METHODE

ARTICLE PREMIER. *Mémoire contenant la démonstration de quelques Théorèmes nouveaux, relatifs aux successions de signes, considérées dans les termes des suites et dans les coefficients des équations.*

(Lu à la séance de la première classe de l'Institut, le 26 août, 1811.)

Dans la *nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques*, dont j'ai eu l'honneur de faire hommage à la première classe de l'Institut en 1807, et qu'elle a daigné mentionner parmi les ouvrages qui, depuis 1789, ont contribué aux progrès de la science, j'ai avancé que "une équation complète quelconque en  $x$ , ne peut avoir  $n$  racines comprises entre zéro et un nombre positif quelconque  $p$ , si la posée n'a pas, au moins,  $n$  variations de signe de plus que sa transformée en  $(x - p)$ ." Ce nouveau théorème ayant été ainsi présenté sans démonstration, j'ai cru devoir m'abstenir d'en faire usage pour la résolution des équations numériques, et j'ai eu recours à d'autres moyens pour constater l'absence des racines réelles entre deux nombres consécutifs de la suite des nombres naturels; néanmoins, comme l'application de ce principe peut abrégér singulièrement le travail de la résolution des équations numériques, en ce qu'elle donne immédiatement les seules valeurs entières parmi lesquelles on puisse chercher les plus grands nombres entiers respectivement contenus dans les diverses racines positives de l'équation proposée, et que le nombre de ces valeurs entières se trouve ainsi fort restreint, étant limité par le plus haut exposant de l'équation, il m'a paru qu'il pourroit être utile de présenter une démonstration du théorème que je m'étais contenté d'énoncer. Quel que soit d'ailleurs le peu d'importance qu'on veuille attacher à de pareilles recherches, j'espère que le nouveau théorème ne sera pas entièrement perdu pour la Science, et qu'il deumeurera placé, dans ses Annales, à côté de cette règle de *Descartes*, attribuée à l'Anglois *Harriot* par ses compatriotes; ils ne se fussent point sans doute empressés de le revendiquer, s'ils n'avaient attaché quelque prix à sa découverte, quoique cette fameuse règle soit restée si longtems sans application, et qu'elle parût destinée à n'être comptée que parmi les vérités spéculatives qui composent une grande partie des Mathématiques. Ce nouveau théorème est l'objet principal de ce Mémoire.

On sait que dans une suite quelconque, le nombre des variations de signe que présentent ses termes est pair, si le premier et le dernier sont de même signe; et que ce nombre est impair, s'ils ont des signes différens.

Ceci posé, on démontre facilement la proposition suivante.

PREMIÈRE PROPOSITION - *Les  $n$  premiers termes d'une suite quelconque ne peuvent contenir moins de variations de signe que les  $n$  premiers termes de sa suite sommatoire d'un ordre quelconque.*

Il suffit de démontrer cette proposition pour une suite quelconque et sa suite sommatoire première, puisqu'une suite sommatoire d'un ordre quelconque  $m$  est la sommatoire première de la suite de l'ordre précédent  $m - 1$ .

On va d'abord prouver que, si les  $n - 1$  premiers termes d'une suite quelconque, ne peuvent contenir moins de variations que les termes correspondans de sa suite sommatoire, il en sera de même pour les  $n$  premiers termes de ces suites.

En effet le nombre des variations dans les  $n - 1$  premiers termes de la suite sommée est, pour lors, ou supérieur, ou égal à celui des variations de signe que présente le même nombre de termes dans la suite sommatoire.

Dans le premier cas, il est évident que le terme  $n^{\text{ième}}$  ajouté à chacune des deux suites pourrait, tout au plus, rendre le nombre des variations que présentent les  $n$  premiers termes de la suite sommatoire égal au nombre des variations que contiennent les termes correspondans de la suite sommée.

Dans le deuxième cas, le terme  $n-1^{\text{ième}}$  a le même signe dans les deux suites, et le terme  $n^{\text{ième}}$ , produisant une nouvelle succession de signes, offrira nécessairement, ou une nouvelle permanence pour chaque suite, ou une variation de part et d'autre, ou bien enfin une variation dans la suite sommée, et une permanence dans la suite sommatoire; il est impossible que l'inverse ait lieu, c'est-à-dire que cette succession soit une permanence dans la suite sommée et une variation dans la suite sommatoire; (*car le terme  $n^{\text{ième}}$  de la suite sommatoire est la somme du terme qui le précède et du terme  $n^{\text{ième}}$  de la suite sommée, et ces deux-ci sont, par hypothèse, de même signe que le terme  $n-1^{\text{ième}}$  de cette dernière suite.*)

On voit donc, dans le second cas comme dans le premier, que les  $n$  premiers termes d'une suite quelconque ne peuvent présenter moins de variations de signes que les termes correspondans de sa suite sommatoire, si la même proposition est vraie pour les  $n-1$  premiers termes respectifs de ces deux suites.

Or il est clair que les deux premiers termes de la suite sommée ne peuvent présenter moins de variations que les deux premiers termes de la suite sommatoire, dont il en sera de même pour les trois premiers termes de chaque suite; et puisqu'il en sera de même pour ces trois premiers, la proposition sera encore vraie pour les quatre premiers, et ainsi de suite : *c.q.f.d.*

Cette première proposition conduit à une seconde que voici.

**SECONDE PROPOSITION** - *Les  $n$  premiers coefficients d'une équation complète quelconque en  $x$  ne peuvent contenir moins de variations de signe que les coefficients correspondans de la transformée en  $x-1$ .*

Pour démontrer cette proposition, je commencerai par rappeler *l'algorithme* qui donne, par de simples additions ou soustractions, les coefficients de la transformée en  $(x-1)$ , algorithme qui a reçu l'approbation de la classe, dans la séance du 23 mai 1803, et qu'elle a jugé susceptible d'être inséré dans les *Eléments d'Algèbre*. J'ai fait voir dans un *Mémoire* présenté à la classe à cette époque, qu'étant donnée une équation en  $x$  de degré  $a$ , le second coefficient de la transformée ou celui de  $(x-1)^{m-1}$ , est la somme  $m^{\text{ième}}$  des deux premiers coefficients de la proposée; que le troisième coefficient de la transformée, ou celui de  $(x-1)^{m-2}$  est la somme  $m-1^{\text{ième}}$  des trois premiers coefficients de la proposée; que la quatrième coefficient de la transformée ou celui de  $(x-1)^{m-3}$  est la somme  $m-2^{\text{ième}}$  des quatre premiers coefficients de l'équation en  $x$ , et ainsi de suite; de sorte que le coefficient  $n^{\text{ième}}$  de la transformée ou celui de  $(x-1)^{m-n+1}$  est la somme  $(m-n+2)^{\text{ième}}$  des  $n$  premiers coefficients de la proposée. Quant au premier coefficient de la transformée en  $(x-1)$ , on sait qu'il est le même que le premier de l'équation en  $x$ .

Nous pouvons maintenant en venir à la démonstration de la seconde proposition : on voit d'abord que les deux premiers coefficients de la transformée en  $(x-1)$  sont respectivement égaux aux deux premiers termes de la suite sommatoire  $m^{\text{ième}}$  des coefficients de la proposée. Or en vertu de la première proposition ci-dessus démontrée, les deux premiers coefficients de la proposée ne peuvent avoir moins de variations que les deux premiers termes de cette suite sommatoire  $m^{\text{ième}}$ ; donc ils ne peuvent aussi en avoir moins que les deux premiers coefficients de la transformée.

Nous ferons observer ici que si une suite de termes ne peut avoir moins de signe qu'une autre suite d'un égal nombre de termes, le premier terme, dans l'une et dans l'autre, étant supposé de même signe, la proposition subsiste toujours quand un même terme est ajouté à chacune des deux suites; car, avant l'addition de ce même terme, la première avoit, ou plus de variations, ou autant que la seconde; si elle en avoit plus, elle doit, après cette addition en avoir encore au moins autant, et si, avant l'addition du nouveau terme, la première avoit seulement autant de variations que la seconde : comme, dans ce cas, le dernier terme se trouve alors de même signe dans une suite que dans l'autre, il est évident que l'addition du nouveau terme introduira, ou

une permanence dans chaque suite, ou une variation, de sorte que la première suite aura encore autant de variations que la seconde.

Considérant actuellement les trois premiers coefficients de la transformée en  $(x - 1)$ , nous remarquerons que le troisième de ces coefficients est aussi le troisième terme de la suite sommatoire  $(m - 1)^{\text{ième}}$  des coefficients de la proposée. Nous avons déjà vu que les deux premiers coefficients de la transformée ne peuvent avoir plus de variations de signe que les deux premiers termes de la suite sommatoire  $m^{\text{ième}}$ , ni par conséquent en avoir plus que les deux premiers termes de la suite sommatoire  $(m - 1)^{\text{ième}}$  des coefficients de la proposée; donc, en vertu de l'observation ci-dessus, les trois premiers termes de la suite sommatoire  $(m - 1)^{\text{ième}}$  ne peuvent avoir moins de variations que les trois premiers coefficients de la transformée en  $(x - 1)$ . Or les trois premiers coefficients de la proposée en  $x$  ne peuvent avoir moins de variations de signe que les trois premiers termes de cette même suite sommatoire  $(m - 1)^{\text{ième}}$ ; donc ils ne peuvent aussi en avoir moins que les trois premiers coefficients de la transformée.

Si l'on considère ensuite les quatre premiers coefficients de la transformée en  $(x - 1)$ , on remarquera d'abord que le quatrième coefficient est aussi le quatrième terme de la suite sommatoire  $(m - 2)^{\text{ième}}$  des coefficients de la proposée, et que les trois premiers coefficients de la transformée ne peuvent avoir plus de variations de signe que les trois premiers termes de cette même suite sommatoire  $(m - 2)^{\text{ième}}$ ; d'où l'on conclura que les quatre premiers coefficients de la transformée ne peuvent avoir plus de variations que les quatre premiers termes de la suite sommatoire  $(m - 2)^{\text{ième}}$ , ni, par conséquent, en avoir plus que les quatre premiers coefficients de la proposée.

Généralement, on voit que les  $n - 1$  premiers coefficients de la transformée en  $(x - 1)$  ne peuvent avoir plus de variations que les  $n - 1$  premiers termes de la suite sommatoire  $(m - n + 2)^{\text{ième}}$ , ni par conséquent en avoir plus que les  $n - 1$  premiers termes de la suite sommatoire  $(m - n + 1)^{\text{ième}}$ , ne peuvent donc avoir moins de variations que les  $n$  premiers coefficients de la transformée; ainsi la proposition dont il s'agit, étant une fois reconnue vraie pour les  $n - 1$  premiers coefficients respectifs des équations en  $x$  et en  $(x - 1)$ , doit être également admise pour les  $n$  premiers coefficients respectifs de ces deux équations, et par conséquent pour leur premiers coefficients respectifs en tel nombre qu'on voudra. *c.q.f.d.*

De la deuxième proposition qui vient d'être démontrée, nous passerons à cette troisième :

**TROISIÈME PROPOSITION** - *Une équation en  $x$  ne peut avoir moins de variations de signe que la transformée en  $(x - p)$ ,  $p$  étant un nombre positif quelconque.*

Car on peut faire  $x = px$ , et substituer cette valeur de  $x$  dans la proposée; il est évident que l'équation en  $x$  qui résultera de cette substitution, présentera exactement les mêmes successions de signe, que celle de  $x$ , puisque  $p$  est positif; et l'on a déjà prouvé qu'une équation en  $x$  ne peut avoir moins de variations que l'équation en  $(x - 1)$ . Soit maintenant substituée à  $x$ , dans l'équation en  $(x - 1)$ , sa valeur  $\frac{x}{p}$ ; on aura  $x - 1 = \frac{1}{p}(x - p)$ , d'où il suit que l'équation en  $(x - 1)$  a exactement les mêmes successions de signe que celle en  $(x - p)$ , de même que l'équation en  $x$  a les mêmes successions de signes que celle en  $x$ , donc la proposée ne peut avoir moins de variations de signe que la transformée en  $(x - p)$ ; *c.q.f.d.*

**QUATRIÈME PROPOSITION** - *S'il existe une seule racine entre zéro et un nombre positif quelconque  $p$ , l'équation proposée en  $x$  doit avoir au moins une variation de plus que la transformée en  $(x - p)$ .*

En effet, on sait que, dans le cas dont il s'agit, le dernier coefficient de l'équation en  $(x - p)$  aura un signe contraire à celui du dernier coefficient de l'équation proposée; et que par conséquent le nombre des variations de signe sera pair dans celle des deux dont le dernier coefficient sera de même signe que le premier, et que ce nombre sera impair dans l'autre équation; le nombre des variations ne peut donc, en cette circonstance, être égal de part et d'autre. Or il ne peut pas

être moindre dans l'équation en  $x$  que dans celle en  $(x - p)$ ; donc il doit être plus grand, et par conséquent, la proposée doit avoir au moins une variation de plus que sa transformée, *c.q.f.d.*

Nous voici maintenant arrivés au nouveau Théorème qui est l'objet principal de ce Mémoire.

**CINQUIÈME PROPOSITION** - *Si une équation en  $x$  a  $n$  racines comprises entre zéro et un nombre positif quelconque  $p$ , la transformée en  $(x - p)$  doit avoir au moins  $n$  variations de moins que la proposée.*

Supposons d'abord que l'équation n'a point de racines égales comprises entre zéro et  $p$ , et représentons les  $n$  racines, en suivant l'ordre de leur grandeur, par  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; de manière que  $x_1$  représente la plus grande de ces racines, et  $x_n$  la plus petite. On peut concevoir des nombres  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ , qui soient respectivement compris entre  $x_1$  et  $x_2$  et  $x_3$ , et ainsi de suite, de sorte que  $p_{n-1}$  soit  $< x_{n-1}$  et  $> x_n$ . On peut, en outre, concevoir  $n$  transformées en  $(x - p_1)$ ,  $(x - p_2)$  etc. Or, il suit de la quatrième proposition qui a été démontrée plus haut, que l'équation en  $(x - p)$  doit avoir au moins une variation de moins que celle en  $(x - p_1)$ ; que celle-ci doit pareillement en avoir au moins une de moins que celle en  $(x - p_2)$ , et ainsi de suite, jusqu'à l'équation en  $(x - p_{n-1})$  qui doit aussi avoir, au moins, une variation de signe de moins que la proposée en  $x$ ; donc la transformée en  $(x - p)$  doit avoir au moins  $n$  variations de moins que la proposée.

Supposons, en second lieu, que la proposée a des racines multiples  $r, r_1$ , etc. comprises entre zéro et  $p$ , on peut concevoir cette équation partagée en deux facteurs  $A$  et  $A'$ ; ce dernier étant composé du produit des facteurs égaux  $(x - r)^q, (x - r_1)^{q_1}$ , etc.; d'où il suit que le polynome  $A'$  n'ayant que des racines positives, dont le nombre sera  $q + q_1 + \dots$ , ne présentera que des variations de signe. Soient, respectivement,  $A_1 = 0, A'_1 = 0$ , les transformées en  $(x - p)$  des équations  $A = 0, A' = 0$ ; l'équation  $A'_1 = 0$  sera formée d'autant de facteurs égaux, qu'il y en a dans  $A'$ : elle sera le produit de facteurs tels que  $(x + r')$ ,  $(x + r'_1)$ , etc., d'où il suit que l'équation  $A'_1 = 0$  n'aura que des racines négatives, en même nombre que les racines positives de l'équation de l'équation  $A' = 0$ , et que par conséquent elle ne présentera que des permanences de signe. Donc, dans le produit  $A_1 A'_1$ , c'est-à-dire, dans la transformée en  $(x - p)$  de la proposée, il ne peut (d'après le théorème si connu de Segner) se trouver, tout au plus, qu'autant de variations de signe que dans  $A_1$ ; comme, au contraire, si l'on désigne respectivement par  $n_1$  et  $n_2$  le nombre des racines positives entre zéro et  $p$  dans les équations  $A = 0, A' = 0$ , il est évident que le produit  $A. A'$ , c'est-à-dire, la proposée en  $x$ , doit contenir, au moins,  $n_2$  variations de plus qu'il n'y en a dans  $A$ . Mais d'après la première partie de la démonstration,  $A$  doit avoir, au moins,  $n_1$  variations de plus que  $A_1$ , et par conséquent  $n_1$  variations de plus que le produit  $A_1. A'_1$ , ou que la transformée en  $(x - p)$  de l'équation en  $x$ . Donc cette transformée, ou le produit  $A_1. A'_1$ , doit contenir pour le moins  $n_1 + n_2$  variations de moins que la proposée en  $x$  ou le produit  $A. A'$ : ou bien, ce qui revient au même, la transformée doit avoir au moins  $n_1 + n_2$  permanences de plus que la proposée.

Donc enfin, soit que la proposée en  $x$  n'ait pas, ou qu'elle ait des racines égales comprise entre zéro et un nombre positif quelconque  $p$ , autant cette proposée a des racines comprises entre zéro et  $p$ , autant, pour le moins, elle doit avoir de variations de signe de plus que n'en contient sa transformée en  $(x - p)$ . *c.q.f.d.*

Il n'a été question jusqu'ici que de racines positives; mais il est évident que le théorème s'étend aux racines négatives et qu'il suffit pour cela de changer dans l'énoncé de la cinquième proposition *plus* en *moins* et réciproquement. Ainsi la proposée ne peut contenir  $n$  racines comprises entre zéro et  $-p$ , qu'autant qu'elle a  $n$  variations de signe de moins que sa transformée en  $(x + p)$ .

En résumé, j'ai prouvé dans ce Mémoire :

1) Que les  $n$  premiers termes d'une suite quelconque ne peuvent contenir moins de variations de signe que les termes correspondans de sa suite sommatoire d'un ordre quelconque;

2) Que les  $n$  premiers coefficients d'une équation complète quelconque en  $x$ , ne peuvent contenir moins de variations de signe que les coefficients correspondans de la transformée en  $(x - 1)$ ;

3) Qu'il en est de même relativement à la transformée en  $(x - p)$ ,  $p$  étant un nombre positif quelconque ;

4) Que, s'il existe une seule racine entre zéro et un nombre positif  $p$  ; l'équation en  $x$  doit avoir au moins une variation de plus que celle en  $(x - p)$  ;

5) Que si une équation en  $x$  a  $n$  racines comprises entre zéro et  $\pm p$ , la transformée en  $(\mp p)$  doit avoir, au moins,  $n$  variations, ou de moins, ou de plus, que la proposée en  $x$ , suivant que la limite  $p$  est précédée du signe  $+$  ou du signe  $-$ .