Université de Rennes 1 Semestre automne 2015-2016

Topologie des espaces métriques-L3

Feuille d'exercices n° 6

Applications linéaires

Exercice 1. *Équivalence des normes.*

Montrer que si deux normes sont équivalentes alors leurs normes subordonnées le sont aussi.

Exercice 2. *Calcul de normes subordonnées.* Ici $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $(m, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$.

Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$, on note $|||A|||_p$, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, la norme subordonnée de A relativement aux normes vectorielles ℓ^p sur $\mathbf{K}^m$ et $\mathbf{K}^n$. On se donne $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$.

1. Montrer que
$$|||A|||_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad |||A|||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

2. *Norme subordonnée à la norme 2.*
   (a) Montrer que $|||A|||_2 = \sqrt{|||A^*A|||_2}$.
   (b) Montrer que la norme 2 est invariante par tranformation unitaire : si $U \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$ est tel que $U^*U = \mathrm{I}_m$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est tel que $V^*V = \mathrm{I}_n$, alors
$$|||A|||_2 = |||UA|||_2 = |||AV|||_2 = |||U^*AV|||_2.$$
   (c) Montrer que si $m = n$ et A est une matrice normale, alors $|||A|||_2 = \rho(A)$, où $\rho(\,\cdot\,)$ désigne le rayon spectral.
   (d) En déduire que
$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = |||A^*|||_2.$$

Exercice 3. *Conditionnement.*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $|||\cdot|||$ la norme subordonnée associée et $A \in \mathcal{L}(E)$ inversible. On définit le *conditionnement* de A par
$$\mathrm{Cond}(A) \;=\; |||A|||\ |||A^{-1}|||\,.$$

1. Montrer que $\mathrm{Cond}(A) \geqslant 1$.
2. Montrer que si $n \in \mathbf{N}^*$, $E = \mathbf{R}^n$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ et A est unitaire, alors $\mathrm{Cond}(A) = 1$.
3. Montrer que si $(x, b) \in E^2$ et $(x', b') \in E^2$ sont tels que $b \neq 0$, $Ax = b$ et $Ax' = b'$ alors $x \neq 0$ et
$$\frac{\|x - x'\|}{\|x\|} \;\leqslant\; \mathrm{Cond}(A)\,\frac{\|b - b'\|}{\|b\|}\,.$$

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$, $x_0 \in E$, $b \in E$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = Ax_n + b$.

1. Déterminer explicitement x_n en fonction de n.
2. Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
3. Montrer que si $\rho(A) > 1$, on peut choisir x_0 et b tel que $\|x_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que si A est *à diagonale strictement dominantes* (par lignes), c'est-à-dire si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |A_{i,i}| \ > \ \sum_{j\neq i} |A_{i,j}|$$

alors A est inversible.

2. En déduire que

$$\sigma(A) \ \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} B_f \left(A_{i,i} \ , \ \sum_{j\neq i} |A_{i,j}| \right) .$$

Exercice 6. *Différentiabilité des applications multi-linéaires.*

1. Montrer qu'une application multi-linéaire est différentiable et déterminer sa différentielle.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'application

$$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n\,, \quad X \mapsto \langle X, AX\rangle$$

est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient.

3. Soit $V : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $A \in \mathbf{R}^2$ et $\varepsilon > 0$.
On se donne X_0, X_1, $X_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $X'(t) = V(X(t))$ et vérifiant $X_0(0) = A$, $X_1(0) = A + \varepsilon e_1$ et $X_2(0) = A + \varepsilon e_2$. On définit alors

$$D_\varepsilon : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \qquad t \longmapsto \det\,(X_1(t) - X_0(t), X_2(t) - X_0(t)) \ .$$

   (a) Calculer $D'_\varepsilon(0)$.
   (b) En déduire que $\mathrm{div}(V)(A) \ = \ \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{D'_\varepsilon(0)}{D_\varepsilon(0)}$.