Feuille d'exercices n^o 5

COMPLÉTUDE

<u>Exercice 1.</u> *Complétude de $\ell^1(\mathbf{N})$.*

On munit l'ensemble des suites réelles sommables

$$\ell^1(\mathbf{N}) \;=\; \left\{ (u_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \;<\; +\infty \right\}$$

de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par, pour $u \in \ell^1(\mathbf{N})$

$$\|u\|_1 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\,.$$

On se donne $(u^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^1(\mathbf{N})^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $\ell^1(\mathbf{N})$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ la suite $(u_k^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ converge.
   On notera désormais u_k^{∞} la limite de cette suite.
2. Montrer que $u^{\infty} \in \ell^1(\mathbf{N})$, que $(u^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers u^{∞} dans $\ell^1(\mathbf{N})$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\|u^{\infty} - u^{(n)}\|_1 \;\leq\; \sup_{m\geq n} \|u^{(m)} - u^{(n)}\|_1\,.$$

<u>Exercice 2.</u> *Exponentielle.*

Soit (E, N) une algèbre unitaire réelle, de Banach telle que $N(1) = 1$. On fixe $a \in E$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C}$ la série de terme général $\frac{z^k}{(k!)}\, a^k$ est absolument convergente.
   On notera désormais $\exp(z\,a)$ sa somme.
2. Montrer que pour tout $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ on a $\exp((z+z')\,a) = \exp(z\,a)\exp(z'\,a)$.

<u>Exercice 3.</u> *Stabilité des solutions.*

Soit (E, d) un espace de Banach non vide et $f : E \to E$ une application strictement contractante.

1. Montrer que pour tout $a \in E$ il existe un unique $x \in E$ tel que $x = f(x) + a$.
   On notera désormais x_a cette solution.
2. Montrer que l'application

$$E \longrightarrow E\,, \qquad a \longmapsto x_a$$

   est Lipschitzienne.

Exercice 4. *Théorème de Cauchy-Lipschitz.*
Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et $V : \mathbf{R} \times E \to E$ continue.
On suppose que V est uniformément Lipschitzienne en sa seconde variable, c'est-à-dire qu'il existe K tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $(x, y) \in E^2$,

$$N(V(t,x) - V(t,y)) \;\leq\; K\; N(x-y)\,.$$

On fixe $T \geq 0$ tel que $T\,K < 1$.

1. Montrer que pour tout x_0 il existe un unique $x \in \mathcal{C}^0([0,T]; E)$ tel que pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$x(t) \;=\; x_0 \;+\; \int_0^t V(s, x(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

   Désormais on note $\Phi(t, x_0)$ la valeur $x(t)$ de la solution précédente x au temps t.

2. Montrer que $\Phi : [0,T] \times E \to E$ est uniformément Lipschitzienne en sa seconde variable.
3. On suppose de plus V bornée. Montrer que Φ est Lipschitzienne.

Exercice 5. *Prolongation des applications uniformément continues.*
Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, $D \subset E$ et $f : D \to F$ uniformément continue.

1. Montrer que l'image par f d'une suite de Cauchy de E est une suite de Cauchy de F.
2. On suppose que F est complet.
   Montrer qu'il existe une application continue $g : \overline{D} \to F$ telle que $g_{|D} = f$.