
Feuille d'exercices n° 4

COMPACTITÉ, CONNEXITÉ

Exercice 1. Soit (E, d) un espace métrique et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ une suite convergente de limite ℓ . Montrer que $\{u_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

Exercice 2. Montrer que $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est compact pour sa topologie usuelle.

Exercice 3. Soit $(E, d), (F, d')$ deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$. On suppose f localement Lipschitzienne et E compact. Montrer que f est Lipschitzienne.

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique et A une partie compacte de E . Montrer qu'il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $d(a, b) = \text{diam}(A)$.

Exercice 5. Parmi les sous-ensembles qui suivent déterminer ceux qui sont compacts pour leur topologie usuelle.

- | | | |
|---|--|--------------------|
| 1. $\mathbf{Q}$; | 2. $\mathbf{Q} \setminus [0, 1]$; | 3. $[0, \infty[$; |
| 4. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$; | 5. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; | |
| 6. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } y = x^2\}$; | 7. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$. | |

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue.

- Montrer que si f est périodique alors f est bornée et atteint ses bornes.
- Supposons que f possède des limites finies ou infinies en $+\infty$ et en $-\infty$, notées

$$\ell_+ = \lim_{+\infty} f \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \quad \text{et} \quad \ell_- = \lim_{-\infty} f \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

et qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) < \min(\{\ell_-, \ell_+\})$.

Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Exercice 7. Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ continue.

Montrer que si X est connexe — respectivement connexe par arcs — alors pour la topologie produit le graphe de f est connexe — respectivement connexe par arcs.

Exercice 8. Parmi les sous-ensembles qui suivent déterminer ceux qui sont connexes et ceux qui sont connexes par arcs pour leur topologie usuelle. Pour ceux d'entre-eux qui ne sont pas connexes identifier leurs composantes connexes.

1. $(\{0\} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \{0\})$;
2. $(\{0\} \times \mathbf{R}) \cup (\{1\} \times \mathbf{R})$;
3. $\mathbf{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$;
4. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(1, 0)\}$;
5. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$;
6. $\{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbf{R}^*\}$;
7. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \exp(x)\}$.

Exercice 9. On munit l'ensemble, noté X , des fonctions affines sur $\mathbf{R}$ non constantes d'une topologie normée. Montrer que X possède exactement deux composantes connexes.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique connexe, (Y, d') un espace métrique et $f : X \rightarrow Y$.

1. Montrer que si f est localement constante alors f est constante.
2. En déduire que si f est continue et Y est discret alors f est constante.
3. Soit g_1, g_2 continues de X dans $\mathbf{R}$ telles que, pour tout $x \in X$, $e^{ig_1(x)} = e^{ig_2(x)}$.
Montrer que $g_1 - g_2$ est constante.

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continue telle que $\gamma(0) \in A$ et $\gamma(1) \notin A$. Montrer que l'image de γ intersecte la frontière de A .

Exercice 12. *Principe d'induction continue.* Soit (X, d) un espace métrique connexe et H, C deux fonctions de X dans $\{0, 1\}$ telles que

- (i) $H^{-1}(\{1\})$ est non vide;
 - (ii) $H^{-1}(\{1\}) \subset C^{-1}(\{1\})$;
 - (iii) $C^{-1}(\{1\})$ est fermé;
 - (iv) pour tout $x \in C^{-1}(\{1\})$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset H^{-1}(\{1\})$.
- Montrer que $H^{-1}(\{1\}) = C^{-1}(\{1\}) = X$.