Université de Rennes 1 Semestre automne 2016-2017

Topologie des espaces métriques-L3

Feuille d'exercices n° 3

NOTION DE CONVERGENCE

Exercice 1. Montrer que $\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est localement Lipschitzienne.

Exercice 2. Soit (E,d) un espace métrique.
Montrer que d et $\min(d,1)$ sont topologiquement équivalentes.

Exercice 3.

1. Soit (E,d) et (F,d') deux espace métriques, $A \subset E$, $f : A \to F$ et $a \in \overline{A}$.
   Montrer que si f admet une limite en a alors f est bornée au voisinage de a.
2. Soit (E,d) un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ une suite convergente.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique, $a \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E.

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si et seulement si elle n'admet pas de sous-suite $(x_{j(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, $j : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante, telle que $d(x_{j(n)}, a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a si et seulement si toutes ses sous-suites admettent une sous-suite convergeant vers a.

Exercice 5. Soit A, B des parties fermées, non vides, et disjointes d'un espace métrique (X,d).

1. Justifier que $\{\ x \in X \mid d(x,A) < d(x,B)\ \}$ est un ouvert de X.
2. En déduire qu'il existe des ouverts U et V de X tels que : $A \subset U$, $B \subset V$, et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 6. Soit (E,d) et (F,d') deux espace métriques, f et g continues de E vers F.
Montrer que si D est une partie dense de E et que $f_{|D} = g_{|D}$ alors $f = g$.

Exercice 7. Soit (E,d) et (F,d') deux espace métriques et $f : E \to F$.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue.

(ii) Pour toute partie A de X, on a : $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(iii) Pour toute partie B de Y, on a : $f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \subset \overset{\circ}{[f^{-1}(B)]}$.

(iv) Pour toute partie B de Y, on a : $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Exercice 8. Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espace métriques. Soit $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$. Montrer que pour la topologie produit on a :

$$\overset{\circ}{(A_1 \times A_2)} = \overset{\circ}{A_1} \times \overset{\circ}{A_2} \qquad \text{et} \qquad \overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$$

Exercice 9. Décrivez l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles suivants :

1. $\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^* \}$ dans $\mathbf{R}$;
2. $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2 \}$ dans $\mathbf{R}^2$;
3. $\{ (\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbf{N}^* \}$ dans $\mathbf{R}^2$;
4. $\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \mid (n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2 \}$ dans $\mathbf{R}$;
5. $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}]$ dans $\mathbf{R}$;
6. $\{ (x, y) \mid x^2 \leq y < x + 1 \}$ dans $\mathbf{R}^2$;
7. $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{R}^2$;
8. $\{ (x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in \mathbf{R}_+^* \}$ dans $\mathbf{R}^2$.