
Feuille d'exercices n° 2

PREMIÈRES NOTIONS DE TOPOLOGIE MÉTRIQUE

Exercice 1. On munit $\mathbf{R}$ de sa distance usuelle. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \leq b$.

1. Montrer que $]a, b[,] - \infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbf{R}$.
2. Montrer que $[a, b],] - \infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbf{R}$.
3. Montrer que $[a, b[$ et $]a, b]$ ne sont ni ouverts, ni fermés dans $\mathbf{R}$.

Exercice 2. Montrer que les singletons des espaces métriques sont fermés.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique et $\Omega \subset X$.

Montrer que Ω est ouvert si et seulement si Ω est une réunion de boules ouvertes.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique .

Montrer que si O est un ouvert alors $O \subset \overset{\circ}{\overline{O}}$ et donner un exemple d'inclusion stricte.

De même montrer que si F est un fermé alors $\overline{\overset{\circ}{F}} \subset F$ et donner un exemple d'inclusion stricte.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X que l'on munit de la distance induite.

1. Montrer que les ouverts de A sont les ensembles de la forme $O \cap A$ où O est un ouvert de X .
2. En déduire que les fermés de A sont les ensembles de la forme $F \cap A$ où F est un fermé de X .
3. Montrer que A est ouvert si et seulement si tout ouvert de A est ouvert dans X et A est fermé si et seulement si tout fermé de A est fermé dans X .

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique et A et B deux parties de X .

1. (a) Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 (b) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
 (c) Donner un exemple d'inclusion stricte.
2. De même comparer $(A \cup B)^\circ$ à $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ et $(A \cap B)^\circ$ à $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique, $x_0 \in X$ et $V \subset X$.

Montrer que V est un voisinage de x_0 si et seulement s'il existe Ω ouvert tel que $x_0 \in \Omega$ et $\Omega \subset V$.

Exercice 8. On considère $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Montrer que localement f est de signe constant, décroissante et bornée.
2. Montrer cependant que f n'est ni décroissante, ni de signe constant, ni bornée.

Exercice 9. On définit

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q}^* \\ q & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } (p, q) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{N}^*, p \wedge q = 1 \end{cases}.$$

Montrer que f n'est bornée au voisinage d'aucun point.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie non vide et bornée de X .

Montrer que $\overline{A}$ est borné et que $\text{diam}(\overline{A}) = \text{diam}(A)$.

Exercice 11. On considère $\mathbf{R}$ muni de sa topologie usuelle.

1. Donner un exemple de partie $A \subset \mathbf{R}$ telle que $\text{Fr}(A) = A$.
2. Donner un exemple de partie $A \subset \mathbf{R}$ telle que $\text{Fr}(A) = \mathbf{R}$.

Exercice 12. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X .

1. Montrer que $\text{Fr}(A) = \emptyset$ si et seulement si A est ouverte et fermée dans X .
2. Démontrer que A est ouverte si et seulement si $A \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$.
3. Montrer que A est fermée si et seulement si $\text{Fr}(A) \subset A$.
4. Montrer que $\text{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Fr}(A)$.

Exercice 13. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X .

1. Montrer que si A est fermée, $\text{Fr}(A)$ est d'intérieur vide.
2. Établir : $\text{Fr}(\text{Fr}(\text{Fr}(A))) = \text{Fr}(\text{Fr}(A))$.

Exercice 14. On munit $E = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ de la distance

$$d : E^2 \rightarrow \mathbf{R}^+, \quad (x, y) \mapsto |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

1. Montrer que $d|_{\mathbf{R}}$ est topologiquement équivalente à la distance usuelle sur $\mathbf{R}$ mais ne lui est pas métriquement équivalente.
2. Montrer que pour cette distance $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.
3. Montrer que pour cette distance $\mathbf{R}$ est dense dans E .
4. Montrer que pour cette distance une propriété sur $\mathbf{R}$ est vraie au voisinage de $+\infty$ si et seulement si elle est vraie sur un ensemble de la forme $[M, +\infty[$ où $M \in \mathbf{R}$.
5. Montrer que pour cette distance une propriété sur $\mathbf{N}$ est vraie au voisinage de $+\infty$ si et seulement si elle est vraie à partir d'un certain rang.