Université de Rennes 1 Semestre automne 2016-2017

Topologie des espaces métriques-L3

Feuille d'exercices n° 1

ESPACES MÉTRIQUES

Exercice 1. Parmi les expressions

$$\begin{array}{lcllcl} d_1(x;y) & = & (x-y)^2 & \qquad d_2(x;y) & = & |x-y|^{1/2} \\ d_3(x;y) & = & |x-2y| & \qquad d_4(x;y) & = & |\arctan x - \arctan y| \end{array}$$

déterminer celles définissant une distance $d : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2. Soit d_1, d_2 deux distances sur un ensemble X. Montrer que l'application

$$d \ : \ X^2 \to \mathbf{R}\,, \qquad (x,y) \mapsto \max(d_1(x,y), d_2(x,y))$$

définit une distance sur X.

Exercice 3. Soit (E,d) un espace métrique et x, y deux points distincts de E.
Montrer qu'il existe une boule ouverte contenant x mais pas y.

Exercice 4.

1. Déterminer les espaces métriques pour lequels toute boule ouverte coïncide avec la boule fermée de même centre et de même rayon.
2. Soit (E,d) un espace métrique fini.
   Montrer que toute boule ouverte est une boule fermée et réciproquement.

Exercice 5.

1. Soit B_0 une boule ouverte d'un espace métrique et $x \in B_0$.
   Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset B_0$.
2. Soit B_1 et B_2 deux boules ouvertes d'un espace métrique et $x \in B_1 \cap B_2$.
   Montrer qu'il existe une boule ouverte B telle que $x \in B$ et $B \subset B_1 \cap B_2$.

Exercice 6. On munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ de

$$\|\ \cdot\ \|_2 \ : \quad \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,, \quad f \mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x}\,.$$

Montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme.

Exercice 7. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose

$$\|P\| \;=\; \sup\left\{ \left|P\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| \;\middle|\; n \in \mathbf{N}^* \right\}\cdot$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 8. On note E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on définit alors les quantités

$$\|f\| \;=\; \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \qquad \text{et} \qquad \|f\|_* = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_*$ sont des normes.
2. Montrer que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 9. On définit sur $\mathbf{R}^2$ l'application suivante,

$$N \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,, \quad (x,y) \mapsto \sup_{t\in\mathbf{R}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbf{R}^2$.
2. Expliciter N.
3. Montrer la version quantitative suivante de l'équivalence des normes euclidienne $\|\cdot\|_2$ et N :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2\,, \quad \frac{1}{2}\|(x,y)\|_2 \le N(x,y) \le \|(x,y)\|_2.$$

Exercice 10. *Distance SNCF.* On fixe un point $p \in \mathbf{R}^2$ et pour tout $x, y \in \mathbf{R}^2$ on pose :

$$D(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{si } x,y,p \text{ sont alignés} \\ d(x,p) + d(y,p) & \text{si } x,y,p \text{ ne sont pas alignés} \end{cases}$$

où d désigne la distance euclidienne sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que D est une distance sur $\mathbf{R}^2$. Déterminer la forme des boules $B^D(m,r)$ en fonction des valeurs de $m \in \mathbf{R}^2$ et $r \in \mathbf{R}_+$.

Exercice 11. On note $\varphi : \mathbf{Q}^* \to \mathbf{Z}^* \times \mathbf{N}^*$ l'injection usuelle, ainsi $(p,q) = \varphi(x)$ si p et q sont premiers entre eux et $x = p/q$. On considère alors d la transportée de la distance ℓ^1 par φ. Explicitement, si pour $i = 1,2$, $p_i \in \mathbf{Z}^*$, $q_i \in \mathbf{N}^*$ et p_i et q_i sont premiers entre eux, alors

$$d\left(\tfrac{p_1}{q_1}, \tfrac{p_2}{q_2}\right) \;=\; |p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|\,.$$

1. Montrer que d n'est pas équivalente à la distance usuelle sur $\mathbf{Q}^*$.
2. Montrer que d n'est pas équivalente à la distance triviale sur $\mathbf{Q}^*$.
3. Montrer que les boules de rayon strictement inférieur à 1 sont des singletons.
4. Montrer que les boules ouvertes sont de cardinal fini.
5. Montrer que si $x_0 \in \mathbf{Q}^*$ et $r \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$ alors $B_o(x_0, r) = B_f(x_0, r)$.