Université de Rennes 1 Semestre automne 2016-2017

Topologie des espaces métriques-L3

Contrôle final

Documents extérieurs et appareils électroniques sont interdits.
L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Dans tout ce qui suit les parties de $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, *sont munies de leur topologie usuelle et les applications linéaires de* $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, *sont identifiées avec les matrices* via *l'identification des éléments de* $\mathbf{R}^n$ *avec des vecteurs-colonnes.*

Exercice 1. On pose $U = \mathbf{R}^2 \setminus (\,]-\infty, 0] \times \{0\})$.
Pour chacune des paires de points (A, B) ci-dessous donner explicitement $\gamma : [0, 1] \to U$ continu tel que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$.

1. $A = (-1, 1)$ et $B = (1, 1)$.
2. $A = (-1, 1)$ et $B = (-1, -1)$.

Exercice 2. Pour les matrices A qui suivent déterminer si la suite des puissances $(A^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers zéro lorque n tend vers l'infini.

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $(E, \langle \cdot\,; \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien, de norme $\| \cdot \|$.
Pour tout $A \subset E$, on pose

$$A^{\perp} = \{ x \in E \quad | \quad \forall a \in A, \quad \langle a; x \rangle = 0 \}.$$

1. Soit $a_0 \in E$.
   (a) Montrer que l'application
   $$f \ : \quad E \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \langle a_0; x \rangle$$
   est lipschitzienne.
   (b) En déduire que $\{a_0\}^{\perp}$ est fermé.
2. Conclure que, pour tout $A \subset E$, l'ensemble $A^{\perp}$ est fermé.

Exercice 4.

1. On définit
$$N \ : \quad \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_+\,, \qquad (x_1,x_2) \ \mapsto \ |x_1+x_2|+|x_2|\,.$$
Montrer que N est une norme.

2. On considère
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
   (a) Pour $x=(-1,1)$, calculer $N(x)$ et $N(Ax)$.

   (b) Déterminer $(a_1,a_2)\in\mathbf{R}^2$ et $(b_1,b_2)\in\mathbf{R}^2$ tel que pour tout $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ l'on ait
$$2x_1+3x_2 = a_1(x_1+x_2)+a_2x_2 \qquad \text{et} \qquad x_1+4x_2 = b_1(x_1+x_2)+b_2x_2\,.$$
   (c) En déduire que $\|\!|A|\!\| \le 4$ où $\|\!|\cdot|\!\|$ désigne la norme subordonnée à N.

   (d) Conclure que $\|\!|A|\!\| = 4$.

Exercice 5. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple.
Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. $[0,1[$ est fermé dans $[0,2[$.
2. $[0,1[$ est fermé dans $]-1,1[$.
3. Dans $\mathbf{R}^2$, $(0,0)$ est un point adhérent à l'ensemble $]0,\infty[\ \times\ ]0,\infty[$.
4. Dans $\mathbf{R}^2$, $(0,0)$ est un point intérieur à l'ensemble $[0,\infty[\ \times\ [0,\infty[$.
5. Toute partie bornée d'un compact est compacte.
6. Tout ouvert d'un connexe est connexe.
7. Tout fermé d'un compact est complet.
8. L'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact.
9. L'image d'un fermé par une application continue est un fermé.