Université de Rennes 1 Semestre automne 2015-2016

Topologie des espaces métriques-L3

Contrôle final

Documents extérieurs et appareils électronniques sont interdits.
L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Dans tout ce qui suit les parties de $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, sont munies de leur topologie usuelle.

Exercice 1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $1 \leq p \leq \infty$, on note $\|\cdot\|_p$ la norme ℓ^p sur $\mathbf{R}^n$, $|||\cdot|||_p$ la norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$.

1. Pour $n = 2$ et $x = (1, 2)$, calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2$, on a $|\langle x, y\rangle| \ \leq \ \|x\|_1 \, \|y\|_\infty$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on a
   $$\|x\|_1 \ = \ \max_{y \neq 0} \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|_\infty} \, .$$
   (c) Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ on a
   $$\|y\|_\infty \ = \ \max_{x \neq 0} \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|_1} \, .$$
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note $A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la transposée de A, c'est-à-dire que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$.
   (a) Vérifier que pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2$, on a $\langle x, A\, y\rangle \ = \ \langle A^T x, y\rangle$.
   (b) Montrer que $|||A^T|||_1 = |||A|||_\infty$.

Exercice 2. On pose

$$\Gamma \ = \ \left\{ \ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \ \middle| \quad x \neq 1 \ \text{ et } \ x^2 + y^2 = 1 \quad \right\} \, .$$

Écrire explicitement un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ tel que $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (2, 1)$.

Exercice 3. Soit $E = \{A, B, C\}$ un ensemble contenant exactement trois éléments distincts.
Pour $a \in \mathbf{R}$, on définit $d_a : E^2 \to \mathbf{R}$ par $d_a(A, A) = d_a(B, B) = d_a(C, C) = 0$,

$$d_a(B, C) = d_a(C, B) = 1\,, \qquad d_a(A, B) = d_a(B, A) = 2 \qquad \text{et} \qquad d_a(A, C) = d_a(C, A) = a\,.$$

Donner un condition nécessaire et suffisante sur a pour que d_a soit une distance sur E.

Exercice 4. Pour $a \in \mathbf{R}$ on définit

$$\Sigma_a \;=\; \big([-1, 1] \times \{0\}\big) \;\cup\; \big(\{a\} \times \mathbf{R}\big)\,.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que Σ_a soit connexe.

Exercice 5. Pour $a \in \mathbf{R}$ on définit

$$K_a \;=\; \{a\} \;\cup\; \left\{ \frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que K_a soit compact.

Exercice 6. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple.
Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. 0 appartient à la frontière de $[-1, 0\,[\cup]\,0, 1]$.
2. 0 appartient à l'intérieur de $[-1, 0\,[\cup]\,0, 1]$.
3. Dans $\mathbf{R}$ aucun ouvert n'est fermé.
4. Dans $\mathbf{R}$ les compacts sont les segments.
5. La cercle $\{\ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\ \}$ est convexe.
6. Sur $\mathbf{R}^*$ toute fonction continue localement constante est constante.
7. Sur $\mathbf{R}^+$ toute fonction continue est Lipschitzienne.