
Contrôle continu

SECONDE PARTIE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.

Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Dans ce qui suit, par défaut, les parties de $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, sont munies de leur topologie usuelle.

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue, $m \in \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$ tels que $f(a) > m$.

Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$, l'on ait $f(x) > m$.

Exercice 2.

1. Pour $a \in \mathbf{R}$ on définit

$$K_a = [0, 1[\cup \{a\}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que K_a soit compact.

2. Pour $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$, on définit

$$\Sigma_\gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + \gamma z^2 = 1 \right\}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur γ pour que Σ_γ soit compact.

Exercice 3. Soit (Y, d') un espace métrique, (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow Y$ continue.

Montrer que le graphe de f est compact pour la topologie produit.

Exercice 4. On pose $E = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et l'on définit

$$d : E^2 \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad (x, y) \mapsto \min(\{\|x + y\|, \|x - y\|\})$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique ℓ^2 sur $\mathbf{R}^2$.

Montrer que d est une distance sur E .

Exercice 5. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}^2$.
2. $[0, 1[$ est un ouvert de $[0, 1]$.
3. Dans $\mathbf{R}$ les singletons sont ouverts.
4. Dans $\mathbf{R}$ tout compact est inclus dans un segment.
5. L'application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \max(\{0, x\})$ est lipschitzienne.
6. L'application $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est lipschitzienne.