Université de Rennes 1 Semestre automne 2015-2016

Topologie des espaces métriques-L3

Contrôle continu

Deuxième partie

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Déterminer si les ensembles qui suivent sont compacts.

$$A = \{ (x,y) \in [0,1] \times \mathbf{R} \mid xy = 1 \}, \quad B = \left\{ (x,y) \in [0,1] \times \mathbf{R} \;\middle|\; x^2 - y^2 = 0 \right\},$$

$$C = \left\{ (x,y) \in [0,1]^2 \;\middle|\; x \neq y \right\}.$$

Exercice 2. Écrire explicitement un chemin continu dans $\mathbf{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbf{R}^*)$ reliant $(-1,1)$ à $(1,1)$.

Exercice 3. Déterminer si les ensembles qui suivent sont connexes par arcs.

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; xy = 1 \right\}, \qquad B = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; y^2 - x^4 = 0 \right\},$$

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0 \text{ ou } y \geq 0 \right\}.$$

Exercice 4. Soit (E,N) un espace vectoriel normé, $A \subset E$ et $x_0 \in A$.
On suppose que A est étoilé par rapport à x_0 c'est-à-dire que pour tout $x \in A$ on a $[x_0, x] \subset A$.
Montrer que A est connexe par arcs.

Exercice 5. Soit $\alpha \in]0,1[$ et (E,d), (E',d') deux espaces métriques.
On dit qu'une application $f : A \to E'$ définie sur $A \subset E$ est α-Höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x,y) \in A^2$, $d'(f(x), f(y)) \leq C\, d(x,y)^\alpha$.
On fixe désormais $f : E \to F$.

1. Montrer que si f est localement α-Höldérienne alors f est continue.
2. Montrer que si f est localement Lipschitzienne alors f est localement α-Höldérienne.
3. Montrer que si (E,d) est compact et f est localement α-Höldérienne, alors f est α-Höldérienne.
4. Montrer que $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$-Höldérienne.