
Contrôle continu
PREMIÈRE PARTIE

*L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.*

Exercice 1. Montrer que l'application $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2$ est localement Lipschitzienne.

Exercice 2. On considère $\mathbf{R}^2$ muni de sa topologie usuelle. Donner l'adhérence, l'intérieur et la frontière des parties suivantes :

$$A = \{ (x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \}, \quad B = \mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R} \times \{0\}).$$

Exercice 3. On considère $\mathcal{D}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel.
2. On définit

$$N_1 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

et

$$N_{\infty} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \max_{n \in \mathbf{N}} |u_n|.$$

On admettra que N_1 et N_{∞} définissent bien deux normes sur $\mathcal{D}$.

Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 4. Pour chacune des applications qui suivent, décider si elle définit ou non une norme sur $\mathbf{R}$, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. $N_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x$;
2. $N_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto 2|x|$;
3. $N_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto |x| + 1$;
4. $N_4 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \max(\{|x|, 1\})$;
5. $N_5 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \arctan(x)$.