Université de Rennes 1 Semestre automne 2015-2016

Topologie des espaces métriques-L3

Contrôle continu

Première partie

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(a,b) \in E^2$. On définit

$$\gamma \,:\, [0,1] \to E\,, \quad t \mapsto t\,a \;+\; (1-t)\,b\,.$$

Montrer que γ est Lipschitzienne.

Exercice 2. On considère $\mathbf{R}^2$ muni de sa topologie usuelle.
Donner l'adhérence, l'intérieur et la frontière des parties suivantes :

$$A \;=\; \{\ (x,y) \mid xy = 0\ \}\,, \qquad\qquad B \;=\; \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

Exercice 3. On définit

$$d_0 \,:\, [-\pi,\pi[^2 \to \mathbf{R}_+\,, \qquad (\theta,\theta') \longmapsto d(\theta-\theta', 2\pi\mathbf{Z})$$

où $d(\cdot, 2\pi\mathbf{Z})$ désigne la distance à $2\pi\mathbf{Z}$ pour la distance usuelle sur $\mathbf{R}$. Explicitement, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$d(x, 2\pi\mathbf{Z}) \;=\; \inf_{k\in\mathbf{Z}} |x - 2\pi\,k|\,.$$

Montrer que d_0 est une distance sur $[-\pi,\pi[$.

Exercice 4. On note X l'espace des fonctions affines sur $\mathbf{R}$ et l'on définit

$$N \,:\, X \to \mathbf{R}_+\,, \qquad f \longmapsto \max(\{|f(0)|, |f(1)|\})\,.$$

1. Montrer que N est une norme sur X.
2. Montrer que pour tout $f \in X$ on a
$$N(f) \;=\; \max_{[0,1]} |f|\,.$$