Quelques rappels sur les normes

Dans la suite, $\mathbf{K}$ est le corps des scalaires. Pour notre cours, ce sera toujours le corps des réels $\mathbf{R}$ ou le corps des complexes $\mathbf{C}$.

1 Normes vectorielles

1.1 Définition

Définition 1 *Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel on appelle* norme *sur E toute application $N : E \to \mathbf{R}_+$ vérifiant les propriétés qui suivent*

(i) pour tout $x \in E$, $N(x) = 0$ implique $x = 0_E$;

(ii) pour tout $(\alpha, x) \in \mathbf{K} \times E$, $N(\alpha\, x) = |\alpha|\, N(x)$;

(iii) pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

À tout norme N sur E on peut associer une distance $E^2 \to \mathbf{R}_+$, $(x, y) \mapsto N(x - y)$. On peut alors introduire les boules ouvertes ou fermées et les notions topologiques associées...
Sur $\mathbf{K}^d$, où $d \in \mathbf{N}^*$, il existe une famille de normes usuelles appelées normes ℓ^p et définies pour $1 \leq p \leq \infty$ par, pour tout $x \in \mathbf{K}^d$,

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\max_{1\leq j\leq d} |x_j| & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

Comme le sous-entend la notation on a, pour $x \in \mathbf{K}^d$, $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$. On s'intéressera particulièrement aux cas $p = 1$ et $p = \infty$ pour leurs simplicités et au cas $p = 2$ parce que $\|\cdot\|_2$ provient du produit scalaire canonique et correspond donc à la géométrie usuelle.

Définition 2 *Si A est une algèbre sur $\mathbf{K}$ on appelle* norme d'algèbre *sur A toute norme N sur A vérifiant de plus, pour tout $(a, b) \in A^2$, $N(ab) \leq N(a)\, N(b)$.*

Lorsque A est unitaire, on ajoute parfois comme condition que $N(1_A) = 1$.

1.2 Produit scalaire

Définition 3 *Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel on appelle* produit scalaire *sur E toute application $B : E^2 \to \mathbf{K}$ vérifiant les propriétés qui suivent*

(i) pour tout $x \in E$, $B(x, x) = 0$ implique $x = 0$;

(ii) pour tout $x \in E$, $B(x, x) \in \mathbf{R}_+$;

(iii) pour tout $(x, y) \in E^2$, $B(y, x) = \overline{B(x, y)}$;

(iv) pour tout $x \in E$, $B(x, \cdot)$ est linéaire.

Lorsque E est de dimension finie, on dira alors que (E, B) est un espace euclidien si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, hermitien si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Dans ce cas, pour $x \in E$, $B(\cdot, x)$ est linéaire si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, anti-linéaire si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Notons cependant que, dans le cas complexe, il n'y a pas de consensus sur la répartition entre le côté linéaire et le côté anti-linéaire.
Sur $\mathbf{K}^d$, où $d \in \mathbf{N}^*$, le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donné par, pour tout $(x, y) \in (\mathbf{K}^d)^2$,

$$\langle x, y \rangle \;=\; \sum_{j=1}^{d} \overline{x_j}\, y_j\,.$$

Proposition 4 *Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors*

$$\| \cdot \| \;:\qquad E^2 \to \mathbf{R}_+\,, \quad x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définit une norme sur E.

Proposition 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$

$$|\langle x, y \rangle| \;\leq\; \|x\|\, \|y\|$$

où $\| \cdot \|$ est la norme associée au produit scalaire.

Proposition 6 (Identité de parallélogramme)
Soit $\| \cdot \|$ une norme sur E associée à un produit scalaire. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$

$$2\|x\|^2 \;+\; 2\|y\|^2 \;=\; \|x + y\|^2 \;+\; \|x - y\|^2\,.$$

La structure de produit scalaire permet également de définir la notion de perpendicularité, de projection orthogonale...

1.3 Équivalence des normes

Définition 7 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E.*
On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes *s'il existe C_1 et C_2 des réels telles que, pour tout $x \in E$,*

$$N_1(x) \;\leq\; C_1\, N_2(x) \qquad \text{et} \qquad N_2(x) \;\leq\; C_2\, N_1(x)\,.$$

Cela est de fait équivalent à l'équivalence topologique des distances associées.

Théorème 8 *Sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 9 *Sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie toute application multi-linéaire est continue.*

2 Normes matricielles

Pour $(m, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on peut évidemment identifier $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ à $\mathbf{K}^{m\times n}$ et le munir d'une des normes vectorielles usuelles. Mais la norme obtenue ne respecte pas l'identification avec les opérateurs linéaires de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^m$ et en général ne se comporte pas bien vis-à-vis du produit matriciel.

La seule exception notable est celle de la norme ℓ^2 sur $\mathbf{K}^{m\times n}$ qui produit une norme appelée *norme de Frobenius* et donnée par, pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$,

$$\|A\|_F = \left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} |A_{i,j}|^2 \right)^{1/2} .$$

De plus le produit scalaire dont elle provient s'écrit lui, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}))^2$,

$$\langle A, B\rangle_F = \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \overline{A_{i,j}}\, B_{i,j} = \mathrm{Tr}(A^* B) .$$

La norme de Frobenius munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'une norme d'algèbre mais $\|\mathrm{I}_n\|_F = n$.

On préférera travailler avec une norme d'opérateurs, c'est-à-dire provenant de l'identification avec les applications linéaires.

Définition 10 *Soit $(m, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$, N_1 une norme sur $\mathbf{K}^m$ et N_2 une norme sur $\mathbf{K}^n$.*

On appelle norme subordonnée *à N_1 et N_2 la norme $\|\!|\cdot|\!\|$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ définie par, pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$,*

$$|\!|\!| A |\!|\!| = \max_{x\in\mathbf{K}^n\setminus\{0\}} \frac{N_1(A\,x)}{N_2(x)}$$

où l'on a identifié $\mathbf{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Avec les notations ci-dessus on a aussi

$$\begin{aligned}
|\!|\!| A |\!|\!| &= \max_{\substack{x\in\mathbf{K}^n\setminus\{0\} \\ N_2(x)\leq 1}} \frac{N_1(A\,x)}{N_2(x)} = \max_{\substack{x\in\mathbf{K}^n \\ N_2(x)\leq 1}} N_1(A\,x) \\
&= \max_{\substack{x\in\mathbf{K}^n \\ N_2(x)=1}} \frac{N_1(A\,x)}{N_2(x)} = \max_{\substack{x\in\mathbf{K}^n \\ N_2(x)=1}} N_1(A\,x) \\
&= \min\left(\{\ C \in \mathbf{R}_+ \ |\quad \forall x \in \mathbf{K}^n\,,\quad N_1(A\,x) \leq C\, N_2(x)\ \}\right) .
\end{aligned}$$

Proposition 11 *Soit $(m, n, p) \in (\mathbf{N}^*)^3$, et N_1, N_2 et N_3 trois normes respectivement sur $\mathbf{K}^m$, $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^p$. On note $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{1,2}$, $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{2,3}$ et $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{1,3}$ les normes subordonnées respectivement à N_1 et N_2, à N_2 et N_3, et à N_2 et N_3.*

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on a

$$|\!|\!| AB |\!|\!|_{1,3} \leq |\!|\!| A |\!|\!|_{1,2}\, |\!|\!| B |\!|\!|_{2,3} .$$

En particulier, les normes subordonnées définissent des normes d'algèbre unitaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Les normes subordonnées présentent l'inconvénient d'être assez peu explicites. Cependant, on dispose du résultat suivant.

Proposition 12 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\|\!| \cdot |\!\|_p$ les normes subordonnées aux normes ℓ^p.*

1. *Soit $(m,n) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. On a*

$$|\!|\!| A |\!|\!|_\infty \;=\; \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad |\!|\!| A |\!|\!|_1 \;=\; \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}|\,.$$

2. *Soit $(m,n) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. On a*

$$|\!|\!| A |\!|\!|_2 \;=\; \left(\max_{\lambda \in \sigma(A^*A)} |\lambda|\right)^{1/2}.$$

   En particulier si $m = n$ et A est normale, alors

$$|\!|\!| A |\!|\!|_2 \;=\; \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|\,.$$

De la structure d'algèbre normée on peut déduire différentes constructions reposant sur des séries entières (exponentielles, inverses...). À titre d'exemple :

Proposition 13 *Soit $d \in \mathbf{N}^*$ et $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_d(\mathbf{K})$. Soit $A \in Gl_d(\mathbf{K})$.*
Si $B \in \mathcal{M}_d(\mathbf{K})$ est tel que $|\!|\!| A^{-1}B |\!|\!| < 1$, alors $A + B$ est inversible et

$$(A+B)^{-1} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1}B)^k\, A^{-1}$$

C'est en particulier le cas si $|\!|\!| B |\!|\!| < 1/|\!|\!| A^{-1} |\!|\!|$.

Corollaire 14 *Les matrices carrées à diagonales strictement dominantes sont inversibles.*

Démonstration. Soit $d \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{K})$ à diagonale strictement dominante. Posons $D = (\delta_{i,j} A_{i,i})_{1\leq i,j\leq d}$ (où l'on utilise la notation de Kronecker). Alors D est inversible et

$$|\!|\!| D^{-1}(A-D) |\!|\!|_\infty \;=\; \max_{1\leq i\leq m} \sum_{\substack{1\leq j\leq d\\ j\neq i}} \frac{|A_{i,j}|}{|A_{i,i}|} \;<\; 1$$

donc $A = D + (A - D)$ est inversible. ∎