Quelques rappels sur les matrices

Dans la suite, $\mathbf{K}$ est le corps des scalaires. Pour notre cours, ce sera toujours le corps des réels $\mathbf{R}$ ou le corps des complexes $\mathbf{C}$.

1 Notations

Soit m, $n \in \mathbf{N}^*$. Une matrice A de type (m, n) sur $\mathbf{K}$ est un tableau de scalaires à m lignes et n colonnes,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{12} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices de type (m, n) sur $\mathbf{K}$. Si $m = n$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées (n, n) sur $\mathbf{K}$. Par défaut, on notera $A_{i,j}$ le coefficient de la matrice A à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

2 Lien avec les applications linéaires

2.1 Représentation matricielle des vecteurs

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension $n \in \mathbf{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E.
Tout vecteur x de E admet une décomposition unique sur $\mathcal{B}$,

$$x \ = \ \sum_{j=1}^{n} x_j \, e_j \ ,$$

les scalaires x_j étant les composantes de x sur la base $\mathcal{B}$.
Lorsqu'une base est fixée, on peut identifier E à $\mathbf{K}^n$ et x à $(x_j)_{1\leq j\leq n}$. En notation matricielle, le vecteur x sera toujours représenté par un *vecteur colonne*,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

2.2 Représentation matricielle d'une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, avec $\dim E = n$ et $\dim F = m$. Fixons deux bases, $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_i)_{1\leq i\leq m}$ base de F.

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Pour connaître u, il suffit de connaître les images de la base $\mathcal{B}$, $(u(e_j))_{1\le j\le n}$, et chaque $u(e_j)$ est donné dans la base $\mathcal{B}'$ comme un vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}.$$

Relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, l'application linéaire u est alors représentée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Par construction, le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A représente le vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
Alors, si $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, par linéarité, on déduit

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) f_i .$$

La définition du produit matricielle, rappelée plus bas, est précisément faite pour que l'on en déduise

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u(x))_1 \\ (u(x))_2 \\ \vdots \\ (u(x))_m \end{pmatrix}.$$

Par défaut, lorsque $E = F$, on utilise la même base, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

2.3 Identification canonique

Par défaut, une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ est identifiée à une application linéaire $u : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ relativement aux bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^m$. Le noyau, l'image et le rang de A sont ainsi définis comme étant le noyau, l'image et le rang de cette application linéaire canoniquement associée.
Avec ces notations on a l'alternative suivante.

Proposition 1 *Pour tout $b \in \mathbf{K}^m$, l'ensemble $\{ \ x \in \mathbf{K}^n \mid Ax = b \ \}$ est :*
- *l'ensemble vide si b n'appartient pas à l'image de A ;*
- *un espace affine dirigé par* $\ker A$ *si b appartient à l'image de A.*

3 Opérations

1. *Somme.* On peut ajouter deux matrices A et B de mêmes dimensions (m, n), et on a
$$(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} \quad \text{pour tout } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$
2. *Multiplication par un scalaire.* On peut multiplier une matrice A de type (arbitraire) (m, n) par un scalaire $\alpha \in \mathbf{K}$, le produit αA étant une matrice de même type (m, n) et
$$(\alpha A)_{i,j} = \alpha A_{i,j} \quad \text{pour tout } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

3. *Produit de deux matrices.* Si A est une matrice (m,n) et B est une matrice (n,p), alors on peut former le produit AB qui est une matrice (m,p) et

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j} \quad \text{pour tout } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le p.$$

Remarque 2 *Le produit est défini pour correspondre à la composition. Si $u : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ et $v : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$ sont les deux applications linéaires canoniquement associées à A et B, alors AB est la matrice canoniquement associée à $u \circ v : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^m$.*

4. *Transposition et adjonction.* Si A est une matrice de type (m,n), sa transposée A^T est la matrice de type (n,m) définie par

$$(A^T)_{i,j} = A_{j,i} \quad \text{pour tout } 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m.$$

Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, alors on peut également définir une matrice adjointe $A^* := \overline{A^T}$ de type (n,m) par

$$(A^*)_{i,j} = \overline{A_{j,i}} \quad \text{pour tout } 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m.$$

Remarque 3 *La transposition permet d'échanger le rôle des colonnes et des lignes.*

Remarques 4 *La matrice adjointe est définie pour que par rapport aux produits scalaires canoniques l'on ait*

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^* x, y \rangle \quad \textit{pour tout } (x,y) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n\,.$$

Lorsque A est réelle, son adjoint et sa transposée coïncident, $A^T = A^*$, d'où, dans ce cas,

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle \quad \textit{pour tout } (x,y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n\,.$$

Remarque 5 *La matrice adjointe permet d'écrire les produits scalaires canoniques euclidien*

$$\langle x, y \rangle \;=\; x^T y \qquad \textit{pour tout } (x,y) \in (\mathbf{R}^n)^2$$

et hermitien

$$\langle x, y \rangle \;=\; x^* y \qquad \textit{pour tout } (x,y) \in (\mathbf{C}^n)^2.$$

Observation 6 *On rappelle que*

$$(A^T)^T \;=\; A\,, \quad (AB)^T \;=\; B^T A^T \qquad \textit{et} \qquad (A^*)^* \;=\; A\,, \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

4 Quelques types de matrice

Une matrice carrée A de taille n est dite

- *diagonale* si $A_{i,j} = 0$ quand $i \neq j$;
  On note $A = \mathrm{diag}(A_{1,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{n,n})$.
- *triangulaire supérieure* si $A_{i,j} = 0$ quand $i > j$;
- *triangulaire inférieure* si $A_{i,j} = 0$ quand $i < j$;
- *à diagonale strictement dominante* si A est complexe et $|A_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{i,j}|$ pour tout $1 \le i \le n$;

— *symétrique* si $A^T = A$;
— *anti-symétrique* si $A^T = -A$;
— *hermitienne* ou *auto-adjointe* si A est complexe et $A^* = A$;
— *anti-hermitienne* ou *anti-adjointe* si A est complexe et $A^* = -A$;
— *positive* si A est réelle et $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$;
— *définie positive* si A est réelle et $\langle x, Ax \rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0_n\}$;
— *orthogonale* si $AA^T = A^T A = \mathrm{I}_n$;
— *unitaire* si A est complexe et $AA^* = A^* A = \mathrm{I}_n$;
— *normale* si A est complexe et $AA^* = A^* A$.

On a noté I_n la matrice carrée de taille n représentant l'identité : $I_n = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$. Il s'agit de l'élément unité pour le produit matriciel. On note également $0_{m,n}$ la matrice constituée de zéros, qui est l'élément neutre pour l'addition.

Remarque 7 *À l'exception de celle de* matrice à diagonale strictement dominante*, toutes les notions ci-dessus sont stables par passage à l'inverse quand il existe.*

Observation 8 *Une matrice orthogonale réelle est également unitaire. Une matrice symétrique réelle est également hermitienne. Les matrices unitaires et les matrices hermitiennes sont également normales.*

Remarque 9 *Toute matrice s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique. La décomposition est donnée explicitement par*

$$A \;=\; \frac{A + A^T}{2} \;+\; \frac{A - A^T}{2} \,.$$

Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$*, alors toute matrice s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice auto-adjointe et d'une matrice anti-adjointe, et la décomposition est donnée explicitement par*

$$A \;=\; \frac{A + A^*}{2} \;+\; i\, \frac{A - A^*}{2i} \,.$$

Remarque 10 *Quand A est unitaire, alors A définit une isométrie sur* $\mathbf{C}^n$*,*

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^* Ay \rangle = \langle x, y \rangle \qquad \textit{pour tout } (x, y) \in (\mathbf{C}^n)^2 \,.$$

Quand A est réelle et orthogonale, alors A définit une isométrie sur $\mathbf{R}^n$*,*

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^T Ay \rangle = \langle x, y \rangle \qquad \textit{pour tout } (x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2 \,.$$

Remarque 11 *Quand A est symétrique définie positive, A induit un produit scalaire par*

$$\langle x, y \rangle_A \;:=\; \langle x, Ay \rangle \,.$$

Quand on étudie de telles matrices, il peut être utile de travailler directement avec le produit scalaire et la norme adaptée.

5 Trace et déterminant

Définition 12 *Soit A une matrice carrée de taille n.*

1. *On appelle* trace *de A la somme de ses termes diagonaux*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

2. *On appelle* déterminant *de A le scalaire noté*

$$\det A \qquad \textit{ou} \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{12} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,n} \end{vmatrix}$$

et défini par

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, A_{1,\sigma(1)} \dots A_{n,\sigma(n)}$$

où $\mathcal{S}_n$ désigne le groupe des permutation de $[\![1, n]\!]$, et $\varepsilon(\cdot)$ la signature.

Observation 13 1. Tr *est une fonction linéaire.*
$\det$ *est une fonction n-linéaire anti-symétrique des vecteurs colonnes.*

2. $\mathrm{Tr}\, A^T = \mathrm{Tr}\, A$ *pour tout matrice carrée A.*
$\det A^T = \det A$ *pour tout matrice carrée A.*

3. $\mathrm{Tr}\, A^* = \overline{\mathrm{Tr}\, A}$ *si A est une matrice carrée à valeurs complexes.*
$\det A^* = \overline{\det A}$ *si A est une matrice carrée à valeurs complexes.*

4. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ *pour tout couple (A, B) de matrices carrées de même taille.*
$\det(AB) = \det A \times \det B$ *pour tout couple (A, B) de matrices carrées de même taille.*

5. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.*

6 Inverse

On dit qu'une matrice carrée de taille $n \in \mathbf{N}^*$ est inversible si elle l'est pour le produit matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Explicitement, une telle matrice A est inversible s'il existe une matrice B carrée de taille n telle que $AB = \mathrm{I}_n$ et $BA = \mathrm{I}_n$. Il existe au plus une telle matrice B et, lorsqu'elle existe, elle est appelée inverse de A et notée A^{-1}.

Remarque 14 *L'inversibilité de A correspond à la bijectivité de l'application canoniquement associée.*

Observation 15 *Si A et B sont des matrices carrées inversibles de même taille, alors*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \qquad \textit{et si } \mathbf{K} = \mathbf{C},\ (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Théorème 16 *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *A est inversible.*

2. *A est injective.*

3. A est surjective.

4. $\det A \neq 0$.

Remarque 17 *L'équivalence des trois premières assertions provient directement des résultats sur les applications linéaires déduits du théorème du rang. L'équivalence avec la dernière provient du fait que, d'après la formule de développement du déterminant par rapport à une colonne ou à une ligne, si B désigne la transposée de la matrice formée des co-facteurs de A, alors $AB = \det(A)I_n$ et $BA = \det(A)I_n$. Cela donne une formule, appelée formule de Kramer, pour l'inverse quand il existe. Cette formule est d'un intérêt pratique nul dès que $n \geq 4$.*

Proposition 18 *Supposons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. L'ensemble des matrices inversibles est un ouvert dense (pour la topologie canonique).*

7 Spectre

7.1 Cas général

Définition 19 *Soit A une matrice carrée de taille $n \in \mathbf{N}^*$.*

1. *On appelle* spectre *de A l'ensemble, noté $\sigma(A)$ ou $sp(A)$, des scalaires $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda I_n - A$ ne soit pas inversible. Son complémentaire $\mathbf{K} \setminus \sigma(A)$ est appelé ensemble résolvant*[1] *et pour tout $\lambda \notin \sigma(A)$, $(\lambda I_n - A)^{-1}$ est appelée matrice résolvante.*
2. *On appelle* valeur propre *de A tout scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\lambda I_n - A$ ne soit pas injectif. Si λ est une valeur propre, alors il existe $x \in \mathbf{K}^n \setminus \{0_n\}$ tel que $Ax = \lambda x$. Un tel vecteur est appelé* vecteur propre *associé à la valeur propre λ. Un tel couple (λ, x) est appelé mode propre. On appelle* espace propre *associé à la valeur propre λ le sous-espace*

$$E_\lambda \; = \; \ker(\lambda I_n - A)\,.$$

Comme une conséquence du théorème fondamental sur l'inversibilité en dimension finie, on a le résultat suivant.

Proposition 20 *Le spectre coïncide avec l'ensemble des valeurs propres. De plus $\lambda \in \mathbf{K}$ est une valeur propre si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique $\chi_A(X) := \det(XI_n - A)$.*

Remarque 21 *Tout polynôme de degré n unitaire $X^n + \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j$ peut être réalisé comme un polynôme caractéristique, par exemple par sa* matrice compagne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarque 22 *Si A et B sont des matrices carrées de même taille, alors $\sigma(AB) = \sigma(BA)$. En effet, si $\lambda \notin \sigma(AB) \cup \{0\}$ alors $\lambda \notin \sigma(BA) \cup \{0\}$ et $(\lambda I_n - BA)^{-1} = \lambda^{-1} I_n + \lambda^{-1} B(\lambda I_n - AB)^{-1} A$.*

1. Souvent noté $\rho(A)$, mais nous réserverons cette notation pour le rayon spectral.

Théorème 23 (de Cayley-Hamilton) *Soit A une matrice carrée de taille $n \in \mathbf{N}^*$ et χ_A son polynôme caractéristique. Alors $\chi_A(A) = 0$.*

Corollaire 24 *Soit A une matrice carrée de taille $n \in \mathbf{N}^*$ inversible. Alors A^{-1} est un polynôme en A.*

7.2 Cas des matrices complexes

Pour ce qui suit, il suffit souvent que $\mathbf{K}$ soit algébriquement clos, c'est-à-dire que tout polynôme possède une racine.

Observation 25 *Pour les matrices à coefficients réels, deux points de vue sont toujours possibles. Pour le spectre, on peut certes appliquer la définition générale avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Mais ce n'est pas la notion utile d'un point de vue pratique. Quant au spectre, nous les verrons donc toujours comme des matrices à coefficients complexes.*

Définition 26

1. *On appelle* multiplicité géométrique *d'une valeur propre λ la dimension de l'espace propre E_λ et* multiplicité algébrique *sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.*
2. *Une valeur propre est dite* simple *si sa multiplicité algébrique vaut un. Elle est dite double si celle-ci vaut deux, triple si elle vaut trois,* etc. *et* multiple *si elle est supérieure ou égale à deux.*
3. *Une valeur propre est dite* semi-simple *si ses multiplicités algébrique et géométrique coïncident.*

Par défaut, le terme multiplicité désigne la multiplicité algébrique.

Proposition 27 *Soit A une matrice carrée de taille $n \in \mathbf{N}^*$.*

1. *A a au moins une et au plus n valeurs propres. La somme des multiplicités algébriques vaut n.*
2. *La multiplicité géométrique est toujours inférieure ou égale à la multiplicité algébrique.*
3. *Si $k \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ désigne les valeurs propres de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$, alors*

$$\mathbf{K}^n \; = \; \bigoplus_{j=1}^{k} \ker\, (\lambda_j I_n - A)^{m_j} \, .$$

Définition 28 *Soit A une matrice carrée de taille $n \in \mathbf{N}^*$.*
On appelle rayon spectral *de la matrice A le nombre réel positif défini par*

$$\rho(A) \; := \; \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \, .$$

Comme nous le verrons, le rayon spectral est intimement lié à la convergence des itérés $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$.

8 Réduction des matrices

8.1 Changement de bases

Le rôle du produit matriciel vis-à-vis de la composition se généralise.

Observation 29 *Soit E, F et G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ trois bases associés.*
Si $u : F \to G$ est une application linéaire de matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ et $v : E \to F$ est une application linéaire de matrice B relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, alors AB est la matrice associée à $u \circ v : E \to G$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$.

Cela permet de changer de base. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Notons P la matrice de l'identité Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. Ainsi la $j^{\text{ème}}$ colonne de P est formée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base $\mathcal{B}'$. P est appelée *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Par définition si $x \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ représente un certain vecteur dans la base $\mathcal{B}'$, alors Px représente le même vecteur dans la base $\mathcal{B}$. De plus P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Si $u : E \to E$ est une application linéaire représentée par la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$, alors relativement à la base $\mathcal{B}'$ la même application linéaire u est représentée par la matrice B donnée par

$$B \;=\; P^{-1}\,A\,P\,.$$

Dans ce cas, les matrices A et B sont dites *semblables*. En choisissant convenablement une nouvelle base, on peut espérer obtenir une matrice semblable avec une forme simple. C'est le principe de la réduction de matrices.

8.2 Diagonalisation

Définition 30 *Une matrice carrée est dite* diagonalisable *si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Observation 31 *Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle possède une base de vecteurs propres.*

Proposition 32 *Sur* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *une matrice est diagonalisable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont semi-simples.*

Corollaire 33 *Sur* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *une matrice dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.*

Proposition 34 *Sur* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.*

Théorème 35

1. Matrices normales. *Sur* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *une matrice normale est diagonalisable dans une base orthonormée.*
2. Matrices symétriques réelles. *Sur* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Le premier point est un corollaire direct de la trigonalisation simultanée.

Remarque 36 *Sur* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *la matrice de passage de la base canonique vers une base orthonormée est une matrice orthogonale. Sur* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *la matrice de passage de la base canonique vers une base orthonormée est une matrice unitaire.*

8.3 Trigonalisation

Même sur $\mathbf{C}$, toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. En revanche elles sont toutes trigonalisables.

Définition 37 *Une matrice carrée est dite* trigonalisable *si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Théorème 38 (Factorisation de Schur) *Sur* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *toute matrice carrée est trigonalisable dans une base orthonormée.*

Il existe même une forme réduite de trigonalisation, la réduction sous forme de Jordan.

Corollaire 39 *Sur* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *la trace est la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité et le déterminant est le produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité.*

Par ailleurs, il est également possible de réduire simultanément les matrices qui commutent.

Proposition 40 *Sur* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *deux matrices carrées qui commutent sont simultanément trigonalisables.*