Quelques rappels sur les équations différentielles

On rappelle ici quelques éléments de théorie sur les équations différentielles, parfois dites *équations différentielles ordinaires* par opposition aux équations aux dérivées partielles. Elles permettent entre autres choses d'écrire des équations pour l'évolution de phénomènes essentiellement ponctuels.

1 Définitions

1.1 Réduction d'ordre

Définition 1 *Soit I intervalle, $d \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}^*$, $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^d$, $\cdots$, $\Omega_{n-1} \subset \mathbf{R}^d$ et*

$$f : I \times \Omega_0 \times \cdots \times \Omega_{n-1} \to \mathbf{R}^d$$

*continue. Soit $J \subset I$ un intervalle. On dit qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ $u : J \to \mathbf{R}^d$ résout sur J l'*équation différentielle d'ordre n *associée à f si, pour tout $(\ell, t) \in [\![0, n-1]\!] \times J$, $u^{(\ell)}(t) \in \Omega_\ell$ et*

$$\forall t \in J\,, \quad u^{(n)}(t) \;=\; f(t, u(t), \cdots, u^{(n-1)}(t))\,.$$

Remarque 2 *Il existe d'autres formes d'équations différentielles. Celles présentées comme ci-dessus sont dites* résolues. *Grâce au théorème d'inversion locale,* localement *toute équation différentielle non dégénérée peut être récrite sous forme résolue.*

Remarque 3 *Quitte à augmenter d en $n\,d$, on peut toujours supposer $n = 1$. Il suffit de poser $\Omega = \prod_{\ell=0}^{n-1} \Omega_\ell$ et de remplacer u par $v : J \to (\mathbf{R}^d)^n$, $t \mapsto (u(t), \cdots, u^{(n-1)}(t))$ et f par*

$$g \;:\quad I \times \Omega \to (\mathbf{R}^d)^n\,, \quad (t, v) \mapsto (v_2, \cdots, v_n, f(t, v))\,.$$

On se focalisera désormais en conséquence sur l'ordre 1.

Exemple 4 *Ainsi l'équation de Newton*

$$m\ddot{x}(t) \;=\; F(t, x(t), m\dot{x}(t))$$

se récrit

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\, p(t) \\ F(t, (x,p)(t)) \end{pmatrix}\,.$$

1.2 Réduction au cas autonome

Définition 5 *On dit qu'une équation est* autonome *lorsque le champ de vecteurs qui la définit ne dépend pas du temps, sa première variable. On dit qu'une équation d'ordre* 1 *est affine ou* linéaire *avec second membre si ce champ de vecteurs est affine en sa seconde variable, et qu'elle est linéaire ou linéaire* homogène *s'il est linéaire en sa seconde variable. On dit qu'elle est* scalaire *si* $d = 1$.

Remarque 6 *Quitte à augmenter* d *en* $d+1$*, on peut toujours supposer que l'équation est autonome. Il suffit de poser* $\Omega' = I \times \Omega$ *et de remplacer* u *par* $v : J \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, $t \mapsto (t, u(t))$ *et* f *par*

$$g \ : \quad I \times \Omega' \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d\,, \quad (t, v) \mapsto (1, f(v))\,.$$

Cependant cette réduction ne préserve pas toutes les simplifications usuelles de la théorie (linéarité,...). Aussi nous n'en ferons pas usage.

1.3 Solutions maximales

Définition 7 *Soit* I *intervalle,* $d \in \mathbf{N}^*$, $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ *et* $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ *continue. Soit* $J \subset I$ *un intervalle. On dit qu'une solution* $u : J \to \mathbf{R}^d$ *de l'équation associée à* f *est* globale *si* $J = I$*. On dit qu'une autre solution* $v : K \to \mathbf{R}^d$*, avec* $K \subset I$ *intervalle, est un* prolongement *de* u *si* $J \subset K$ *et* $v_{|J} = u$*. On dira qu'une solution* u *est* maximale *si elle ne possède pas de prolongement non trivial.*

Remarque 8 *Toute solution globale est évidemment maximale. Nous allons voir que toute solution possède un prolongement maximal mais que ce prolongement n'est en général pas global. Donnons-en deux exemples.*

Exemple 9 *Pour le champ de vecteur* $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, $(t, x) \mapsto -1/x$ *et tout* $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$ *la fonction*

$$]-\infty\,, \tfrac{1}{2}\,x_0^2\,[\to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto \sqrt{x_0^2 - 2t}$$

est une solution maximale.

Exemple 10 *Pour le champ de vecteur* $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $(t, x) \mapsto x^2$ *et tout* $x_0 \in \mathbf{R}$ *la fonction*

$$I_{x_0} \to \mathbf{R}\,, \qquad t \mapsto \frac{x_0}{1 - x_0\,t}$$

est une solution maximale si

$$I_{x_0} \ = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \text{si } x_0 = 0 \\ ]-\infty\,, \frac{1}{x_0}\,[& \text{si } x_0 > 0\,. \\ ]\,\frac{1}{x_0}\,, \infty\,[& \text{si } x_0 < 0 \end{array} \right.$$

L'existence d'un prolongement maximal est entre autres choses liée au fait que l'on puisse recoller des solutions.

Lemme 11 *Pour un champ de vecteurs continu, si* u *résout l'équation différentielle sur un intervalle* J*, que* v *résout l'équation différentielle sur un intervalle* K *et qu'il existe* $t_0 \in J \cap K$ *tel que* $u(t_0) = v(t_0)$ *alors*

$$(J \cap]-\infty, t_0]) \cup (K \,\cap\, [t_0, \infty[) \,\to \mathbf{R}^d\,, \quad t \,\mapsto \begin{cases} u(t) & \text{si } t \leq t_0 \\ v(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une solution.

2 Formulation intégrale et théorie locale

Soit I une intervalle, $d \in \mathbf{N}^*$, $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ouvert et $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ continue.

2.1 Problème de Cauchy

Pour espérer une unique solution il nous faut compléter l'équation par une donnée initiale $u_0 \in \Omega$ en un temps $t_0 \in I$. On parle de *problème de Cauchy.* Il est crucial ici que I soit un intervalle sinon il faudrait prescrire une contrainte de valeur sur chaque composante connexe de I pour espérer assurer l'unicité. Il est également important que u_0 appartienne à l'intérieur de Ω pour espérer qu'une solution existe, d'où l'hypothèse Ω ouvert.

Remarque 12 *Le lemme de recollement des solutions montre que, quitte à découper* $I = (I \cap [\inf I, t_0]) \cup (I \cap [t_0, \sup I]) =: I_1 \cup I_2$, *on pourrait se ramener aux cas* $t_0 = \min I$ *ou* $t_0 = \max I$. *Par ailleurs le second cas se ramène au premier quitte à inverser la flèche du temps, c'est-à-dire quitte à changer* t_0 *en* $-t_0$, I *en* $-I$, u *en* $v : -I \to \mathbf{R}^d$, $s \mapsto u(-s)$ *et* f *en* $(-I) \times \Omega \to \mathbf{R}^d$, $(s, v) \mapsto -f(-s, v)$.

Remarque 13 *Par ailleurs on pourrait également supposer — sans perdre en généralité — que* $t_0 = 0$ *quitte à translater en temps c'est-à-dire quitte à changer* I *en* $-t_0+I$, u *en* $v : -t_0+I \to \mathbf{R}^d$, $s \mapsto u(t_0+s)$ *et* f *en* $(-t_0 + I) \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $(s, v) \mapsto f(t_0 + s, v)$.

Un point-clé de la théorie est que le problème de Cauchy possède une *formulation intégrale* qui se présente comme un problème de point fixe.

Proposition 14 *Soit* $J \subset I$ *un intervalle,* $t_0 \in J$ *et* $u_0 \in \mathbf{R}^d$.
Pour toute fonction $u : J \to \Omega$ *sont équivalents*

1. u *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et vérifie*

$$u(t_0) = u_0 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in J\,, \quad u'(t) \;=\; f(t, u(t))\,;$$

2. u *est continue et vérifie*

$$\forall t \in J\,, \quad u(t) \;=\; u_0 \,+\, \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds\,.$$

2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Sous les hypothèses de la proposition le problème se récrit comme la recherche d'un point fixe pour

$$\Phi : \mathcal{C}^0(J, \Omega) \to \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d)\,, \quad u \mapsto (J \to \mathbf{R}^d,\, t \mapsto u_0 \,+\, \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, \mathrm{d}s)\,.$$

Si J est un segment, l'espace $\mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d)$ est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\forall u \in \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d)\,, \quad \|\, u\,\|_\infty = \max_{t \in J} \|u(t)\|\,.$$

On montre alors également que si f est lipschitzienne en sa seconde variable, Φ l'est également. En travaillant dans un sous-espace fermé convenable de $\mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d)$, on peut ainsi s'appuyer sur le théorème de point fixe de Banach pour obtenir le théorème qui suit.

Théorème 15 Théorème de Cauchy-Lipschitz.
On suppose comme ci-dessus que I est un intervalle, Ω est ouvert, $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ est continue. On suppose de plus que f est localement lipschitzienne en sa seconde variable. Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbf{R}^d$.
Alors le problème de Cauchy associé possède une unique solution maximale $u : I_* \to \Omega$.
L'intervalle maximal d'existence $I_* \subset I$ est ouvert dans I et contient t_0.
De plus, u est un prolongement de toute solution du problème de Cauchy associé à (t_0, x_0).
Par ailleurs, on a

- **cas globalement lipschitzien :** *si $\Omega = \mathbf{R}^d$ et f est globalement lipschitzienne en sa seconde variable, alors u est globale, $I_* = I$;*
- **régularité :** *si f est de plus $\mathcal{C}^m$, $m \in \mathbf{N}$, alors u est $\mathcal{C}^{m+1}$;*
- **explosion en temps fini :** *si* $\sup I_* < \sup I$*, alors*

$$\|u(t)\| + \frac{1}{d(u(t), \partial\Omega)} \overset{t \to \sup I_*}{\to} +\infty$$

  et si $\inf I_* > \inf I$*, alors*

$$\|u(t)\| + \frac{1}{d(u(t), \partial\Omega)} \overset{t \to \inf I_*}{\to} +\infty$$

- **continuité par rapport à la donnée initiale :** *si $J \subset I_*$ est un segment contenant t_0, alors il existe un voisinage $U \subset \Omega$ de u_0 tel que l'application*

$$U \to \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d), \quad v_0 \mapsto v_{|J} \text{ où } v \text{ est la solution maximale associée à } v_0$$

  soit bien définie et lipschitzienne.

Remarque 16 *Dès que f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est bien continue et localement lipschitzienne.*

Remarque 17 *La simple continuité ne suffit pas à assurer l'unicité. L'exemple qui suit montre que la condition Lipschitz est proche d'être optimale.*

Exemple 18 *Pour $0 < \alpha < 1$, la fonction*

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad (t, v) \mapsto \frac{1}{1-\alpha} |v|^\alpha ,$$

est localement α-höldérienne en v mais le problème de Cauchy associé en $(t_0, u_0) = (0, 0)$ possède comme solution à la fois la fonction nulle et, pour tout $\tau \geq 0$

$$u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} (t-\tau)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{si } t \geq \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Remarque 19 *La continuité de f suffit en revanche à montrer l'existence d'une solution par un argument de compacité plutôt que de contraction. Il suffit par exemple de montrer que l'on peut extraire une suite convergente des fonctions construites en interpolant les valeurs provenant du schéma d'Euler explicite. Le théorème correspondant est appelé théorème de Cauchy-Peano.*

2.3 Lemme de Grönwall

L'existence globale n'implique pas ni que la solution maximale est bornée ni qu'elle ne s'approche pas du bord de Ω mais qu'elle ne peut pas le faire *avant* le bord de I.
Réciproquement, pour montrer qu'une solution maximale est globale il suffit de montrer que u ne peut pas exploser avant le bord de I. L'équation donne souvent directement une borne sur u en fonction d'elle-même. Le lemme qui suit (et plus encore ses nombreuses variantes) appliqué par exemple à $y : I_* \to \mathbf{R}_+$, $t \mapsto \|u(t)\|$ permet parfois de rendre ce cercle vertueux.

Lemme 20 Lemme de Grönwall. *Si $J = [t_0, t_1]$ est un segment, $A \in \mathbf{R}_+$, $B : J \to \mathbf{R}_+$ est continue et $y : J \to \mathbf{R}_+$ est une fonction continue telle que*

$$\forall t \in J, \quad y(t) \ \leq \ A + \int_{t_0}^{t} B(s)\, y(s)\, ds\,,$$

alors

$$\forall t \in J, \quad y(t) \ \leq \ A \exp\left(\int_{t_0}^{t} B(s)\, ds\right)\,.$$

Ce lemme permet de montrer que si f croît au plus linéairement en sa seconde variable alors les solutions maximales sont globales. On prendra garde cependant de croire que seule la taille de f joue un rôle dans la détermination du caractère global des solutions. Cette question peut dépendre crucialement d'une annulation ou d'un signe favorable.

Exemple 21 *Le champ de vecteurs*

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \qquad (t, u) \mapsto -\,u^3$$

génère des solutions maximales globales. Pour le champ de vecteurs

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \qquad (t, u) \mapsto u^3\,,$$

toutes les solutions maximales non nulles explosent en temps fini.

2.4 Flot différentiel

On peut aussi vouloir exprimer la régularité de la solution par rapport à toutes ses variables de manière jointe. On peut le faire de la manière qui suit.

Définition 22 *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut définir un* flot

$$\Phi : \quad \mathcal{D} \to \Omega\,, \qquad (t, t_0, u_0) \mapsto u(t) \qquad \text{où } u \text{ est la solution maximale partant de } u_0 \text{ en } t_0$$

avec

$$\mathcal{D} \ = \ \left\{\ (t, t_0, u_0) \in I^2 \times \Omega \ \middle|\ t \text{ appartient à l'intervalle maximale d'existence en partant de } u_0 \text{ en } t_0\ \right\}\,.$$

Proposition 23 *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, $\mathcal{D}$ est ouvert dans $I^2 \times \Omega$ et Φ est localement lipschitzien. Si, de plus, pour un certain $p \in \mathbf{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^p$ et $d^p f$ est différentiable en sa seconde variable avec une différentielle continue, alors Φ est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$.*

Quand $p = 1$ on montre également que

$$\mathrm{d}\Phi(t, t_0, u_0)(h, h_0, \eta_0) \;=\; h\, f(t, \Phi(t, t_0, u_0)) \,+\, \Psi(t, t_0, \eta_0 - h_0\, f(t_0, u_0))$$

où Ψ est le flot associé à la linéarisation de l'équation autour de $t \mapsto \Phi(t, t_0, u_0)$, correspondant donc au champ de vecteur

$$g : I_* \times \Omega \to \mathbf{R}^d\,, \quad (t, u) \mapsto \mathrm{d}_u f(t, \Phi(t, t_0, u_0))(u)$$

avec I_* le temps maximal d'existence de la solution partant de u_0 en t_0.

3 Théorie linéaire autonome

Comme souvent on ne peut guère espérer résoudre explicitement les équations différentielles que dans le cas linéaire, et en l'occurrence seulement dans les cas linéaire et autonome ou linéaire et scalaire. Rappelons le cas linéaire autonome.

Proposition 24 *Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $t_0 \in \mathbf{R}$, $u_0 \in \mathbf{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.*
On considère $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $(t, u) \mapsto A\,u$.
Alors la solution maximale associée au problème de Cauchy est globale et donnée par

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^d, \quad t \mapsto e^{(t-t_0)A}\, u_0\,.$$

Remarque 25 *Les exponentielles des blocs de Jordan étant explicites, puisque si $\lambda \in \mathbf{C}$*

$$\forall t \in \mathbf{R}\,, \forall (i_0, j_0) \in [\![1, d]\!]^2\,, \quad (\exp(t\,[\lambda\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j}]_{i,j}))_{i_0, j_0} \;=\; \begin{cases} e^{\lambda\, t}\dfrac{t^{j_0 - i_0}}{(j_0 - i_0)!} & \textit{si } j_0 \geq i_0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}\,,$$

disposer d'une décomposition de Jordan de A donnerait un caractère complètement explicite au résultat qui précède.

Par ailleurs ce résultat peut être étendu aux cas affines dont la partie linéaire est autonome.

Proposition 26 Variation de la constante *ou* **formulation de Duhamel.**
Soit I un intervalle, $d \in \mathbf{N}^*$, $t_0 \in I$, $u_0 \in \mathbf{R}^d$, $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ et $b : I \to \mathbf{R}^d$ continue.
On considère $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $(t, u) \mapsto A\,u \,+\, b(t)$.
Alors la solution maximale associée au problème de Cauchy est globale et donnée par

$$I \to \mathbf{R}^d, \quad t \mapsto e^{(t-t_0)A}\, u_0 \,+\, \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\, b(s)\, ds\,.$$