
Travaux pratiques n° 2

Commencer par terminer la fiche n° 1.

Exercice 1. *Orthonormalisation.*

1. Définir une fonction

function Q=gram1(A,B)

qui applique aux colonnes de B le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour le produit scalaire hilbertien associé à la matrice hermitienne définie positive A.

2. (a) Démontrer et vérifier numériquement que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont hermitiennes définies positives.

- (b) Déterminer théoriquement et vérifier numériquement sur des exemples la valeur de $Q^* * A * Q$ lorsque $Q = \text{gram1}(A, B)$.
3. Utiliser la commande `gram1` pour appliquer à la base canonique des fonctions sur $[-1, 1]$ polynomiales complexes de degré inférieur ou égal à 2 le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour le produit scalaire hermitien L^2 , défini par : pour toutes fonctions f et g ,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \bar{f} g.$$

4. Modifier la fonction `gram1` en une fonction `gram2`

function [Q,R]=gram2(A,B)

qui donne également R tel que $B = Q * R$.