Feuille d'exercices n° 7

Équations différentielles.

Dans tout ce qui suit, les temps d'approximation sont choisis équi-distants.

__Exercice 1.__ **Asymptotique, raideur & schéma implicite.**

Soit $\varepsilon > 0$, $\ell \in \mathbf{R}$ et $x_0 \in \mathbf{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$x(0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \Big(\forall t \in \mathbf{R}_+,\ x'(t) = -\frac{1}{\varepsilon}\,(x(t)-\ell)\Big) \tag{1}$$

pour $x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. (a) Écrire l'équation différentielle de (1) sous la forme $x'(t) = F_\varepsilon(x(t))$ et donner la constante de Lipschitz de F_ε.

   (b) Donner explicitement x la solution de (1).

   (c) Montrer que si $(t_0(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \in (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{R}_+^*}$ est une famille de temps telle que $\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{=} o(t_0(\varepsilon))$ alors

$$\sup_{t \geq t_0(\varepsilon)} |x(t)-\ell| \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps.

   (a) Écrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (1).
   Consigne : on notera $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des temps d'approximation, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des approximations correspondantes.

   (b) Donner explicitement $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (c) Montrer que pour tout $c_0 \in]0,2[$ sous la contrainte $h \leq c_0\,\varepsilon$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie

$$\sup_{n \geq t_0(\varepsilon)/h} |x_n-\ell| \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

   pour toute famille de temps $(t_0(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \in (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{R}_+^*}$ telle que $\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{=} o(t_0(\varepsilon))$.

   (d) Sous la condition précédente, exprimer en fonction de ε le nombre minimal de temps d'approximation impliqués dans un calcul approché de $x_{|[0,10]}$.
   Quel est ce nombre lorsque $\varepsilon = 0,005$?

   (e) Montrer que sous la contrainte $h = c_0\,\varepsilon$ avec $c_0 > 2$, si $x_0 \neq \ell$ alors

$$|x_{\lceil t_0(\varepsilon)/h\rceil} - \ell| \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

   pour toute famille de temps $(t_0(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \in (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{R}_+^*}$ telle que $\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{=} o(t_0(\varepsilon))$.

   (f) Montrer que sous la contrainte $h = \varepsilon^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$, si $x_0 \neq \ell$ alors

$$\inf_{n\geq 1} |x_n-\ell| \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

3. Répondre à $2.(a) - 2.(b)$ en remplaçant le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite, et montrer que si $h > 0$ est fixé indépendamment de ε

$$\sup_{n\geq 1} |x_n - \ell| \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

<u>Exercice 2.</u> Problèmes hamiltoniens : l'oscillateur harmonique.

Soit $(x_0, p_0) \in \mathbf{R}^2$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = p_0, \qquad \text{et} \qquad (\forall t \in \mathbf{R}_+,\ x''(t) + x(t) = 0) \tag{2}$$

pour $x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1. On introduit $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, p) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2)$.
   (a) Montrer que la réduction d'ordre appliquée à (2) conduit au problème de Cauchy

   $$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \partial_p H(x(t), p(t)) \\ -\partial_x H(x(t), p(t)) \end{pmatrix}\right) \tag{3}$$

   pour $(x, p) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$.

   (b) Montrer que si $(x, p) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^2$ résout (3) alors

   $$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad H(x(t), p(t)) = H(x_0, p_0)\,.$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps.
   (a) Écrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (3).
   On notera $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des temps d'approximation, et $((x_n, p_n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des approximations correspondantes.

   (b) Donner explicitement $(H(x_n, p_n))_{n\in\mathbf{N}}$.

   (c) Qu'arrive-t-il à $\|(x_n, p_n)\|$ quand $n \to +\infty$?

3. Répondre à $2.(a) - 2.(c)$ en remplaçant le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite.

4. On définit $H_{num} : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $(x, p, h) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2 + h\,xp)$.
   Soit $h > 0$ un pas de temps.

   (a) Montrer que, pour tout $(x, p, h) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$, alors

   $$\left(1 - \tfrac{1}{2}h\right)\, H(x, p) \;\leq\; H_{num}(x, p, h) \;\leq\; \left(1 + \tfrac{1}{2}h\right)\, H(x, p)\,.$$

   (b) Justifier que le schéma implicite

   $$\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \left(\forall n \in \mathbf{N},\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} p_n \\ -x_{n+1} \end{pmatrix}\right) \tag{4}$$

   est bien défini. Ce schéma est appelé *schéma d'Euler symplectique*.

   (c) Montrer que le schéma d'Euler symplectique à pas constant est convergent
   et au moins d'ordre 1.

   (d) Montrer que la suite ainsi construite vérifie

   $$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad H_{num}(x_n, p_n, h) = H_{num}(x_0, p_0, h)\,.$$