Université de Rennes 1 Semestre printemps 2017-2018

Analyse numérique-L3

Feuille d'exercices n° 6 bis

INTERPOLATION TRIGONOMÉTRIQUE ET TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE.

Dans toute la suite on note $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbf{Z}}$ les coefficients de Fourier d'une fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ périodique de période 2π (intégrable sur $[0,2\pi]$) : pour tout $k\in\mathbf{Z}$

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Exercice 1. *Transformation de Fourier discrète.*

Soit $m\in\mathbf{N}^*$. On définit

$$\mathcal{F}_m:\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^m,\quad (f_0,\cdots,f_{m-1})\longmapsto\left(\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f_j\,e^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi j}{m}}\right)_{k\in[\![0,m-1]\!]}$$

et

$$\mathcal{G}_m:\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^m,\quad (c_0,\cdots,c_{m-1})\longmapsto\left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k\,e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi j}{m}}\right)_{j\in[\![0,m-1]\!]}\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{G}_m=(\mathcal{F}_m)^{-1}$.
2. En déduire que pour tout $(f_0,\cdots,f_{m-1})\in\mathbf{C}^m$ il existe un unique $(c_0,\cdots,c_{m-1})\in\mathbf{C}^m$ tel que $P:[0,2\pi[\to\mathbf{C},\ x\mapsto\sum_{k=0}^{m-1} c_k\,e^{\mathrm{i}k\,x}$ vérifie, pour tout $j\in[\![0,m-1]\!]$, $P\left(\frac{2\pi j}{m}\right)=f_j$.

Exercice 2. *Erreur d'interpolation trigonométrique.*

Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction périodique de période 2π, de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $m\in\mathbf{N}^*$. Pour tout tout $k\in\mathbf{Z}$, on note

$$c_k^{(m)}(f)\ =\ \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f\Big(\frac{2\pi\,j}{m}\Big)\,e^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi j}{m}}\,.$$

On définit alors

$$P\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{C},\quad x\mapsto\sum_{k=-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}^{m-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1} c_k^{(m)}(f)\,e^{\mathrm{i}k\,x}\,.$$

1. Montrer que, pour tout $(k,l)\in\mathbf{Z}^2$, on a $c_{k+lm}^{(m)}(f)=c_k^{(m)}(f)$.
2. En déduire que pour tout $l\in\mathbf{Z}$,

$$P_l\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{C},\quad x\mapsto\sum_{k=l}^{m+l-1} c_k^{(m)}(f)\,e^{\mathrm{i}k\,x}$$

vérifie, pour tout $j\in[\![0,m-1]\!]$, $P_l\left(\frac{2\pi j}{m}\right)=f\Big(\frac{2\pi\,j}{m}\Big)$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k^{(m)}(f) - c_k(f) \;=\; \sum_{l \in k + m\mathbf{Z}^*} c_l(f)\,.$$

4. Montrer que

$$\sup_{\mathbf{R}} |f - P| \;\leq\; 2 \sum_{|k| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} |c_k(f)| \;\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}\; 0\,.$$