Université de Rennes 1 Semestre printemps 2017-2018

Analyse numérique-L3

Feuille d'exercices n° 6

INTERPOLATION ET QUADRATURE.

Exercice 1. *Un exemple de formule intégrale pour le reste.*

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) \;=\; (x-a)\,(x-b)\int_0^1\int_0^1 f''(a+t(b-a)+ts(x-b))\,t\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}s\,.$$

2. En déduire que si P est le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f aux nœuds a et b, alors, pour tout segment I contenant $[a,b]$ et tout $x \in I$,

$$|f(x) - P(x)| \;\leq\; \tfrac{1}{2}\max_I |f''|\ \ |(x-a)\,(x-b)|\;.$$

Exercice 2. *Un exemple de polynôme d'interpolation.*

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

1. Déteminer le polynôme P_1 d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds 0 et 1.
2. Déterminer le polynôme P_2 d'interpolation de Lagrange de f aux noeuds 0, 1/2 et 1.
   On l'écrira sous forme de Lagrange et sous forme de Newton.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_1(x)dx$ en fonction de $f(0)$ et $f(1)$.
   Cette formule est à la base de la méthode de quadrature dite *des trapèzes.*
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_2(x)dx$ en fonction de $f(0)$, $f(1/2)$ et $f(1)$.
   Cette formule est à la base de la méthode de quadrature dite *de Simpson.*

Exercice 3. *Interpolations simple et composée.*

Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus [-1,1]$. On définit la fonction $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$.

1. Cacluler les dérivées successives de f.
2. Soit $m \in \mathbf{N}$. On pose, pour $k \in [\![0,m]\!]$, $x_k = -1 + k\frac{2}{m}$.
   (a) On note P_m le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en ces noeuds.
   Montrer que si $|\alpha| > 3$, alors
   $$\lim_{m\to\infty}\sup_{[-1,1]} |f - P_m| = 0\,.$$
   (b) On note $f_m : [-1,1] \to \mathbf{R}$ la fonction, polynomiale de degré au plus 1 sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq m-1$, et telle que pour tout $k \in [\![0,m]\!]$, $f_m(x_k) = f(x_k)$.
      i. Donner l'expression de la fonction f_m.
      ii. Donner explicitement $C > 0$ tel que
      $$\sup_{[-1,1]} |f - f_m| \leq \frac{C}{m^2}\,.$$

Notations.

Dans toute la suite on note $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbf{Z}}$ les coefficients de Fourier d'une fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ périodique de période 2π (intégrable sur $[0,2\pi]$) : pour tout $k\in\mathbf{Z}$

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

<u>**Exercice 4.**</u> *Quelques rappels sur les séries de Fourier.*

Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction périodique de période 2π, de classe $\mathcal{C}^n$, $n\in\mathbf{N}$.

1. Montrer que les coefficients de Fourier de f sont bien définis et que pour tout $p\in[\![0,n]\!]$ et tout $k\in\mathbf{Z}^*$, $c_k(f)=\dfrac{1}{(\mathrm{i}k)^p}c_k(f^{(p)})$.
2. Montrer qu'il existe une constante C (dépendant de f et n) telle que pour tout $k\in\mathbf{Z}^*$,
$$|c_k(f)|\le\frac{C}{|k|^n}\,.$$
3. On suppose de plus que $n\ge 2$. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement pour la topologie uniforme. *On rappelle qu'alors pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k(f)\,e^{ikx}$.*

<u>**Exercice 5.**</u> *Méthode des rectangles pour les fonctions périodiques.*

Soit $n\in\mathbf{N}^*$.

1. Calculer, pour $k\in\mathbf{Z}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi j}{n}}$.
2. En déduire que, pour tout $k\in\mathbf{Z}$, on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi j}{n}}\;=\;\begin{cases}-1 & \text{si } k\in n\mathbf{Z}^*\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$
3. Soit f une fonction périodique de période 2π et de classe $\mathcal{C}^m$, $m\in\mathbf{N}$, $m\ge 2$.
   (a) Montrer que
   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\;-\;\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\;=\;-\sum_{k\in n\mathbf{Z}^*}c_k(f)\,.$$
   (b) Donner explicitement C (dépendant de f et m) telle que
   $$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\;-\;\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right|\;\le\;\frac{C}{n^m}.$$

Ainsi la méthode des rectangles appliquée au calcul de $\int_a^b f$ quand f est $(b-a)$-périodique est d'ordre ∞. On dit aussi qu'elle est de précision spectrale.