Université de Rennes 1 Semestre printemps 2017-2018

Analyse numérique-L3

Feuille d'exercices n° 4

Recherche de modes propres

Exercice 1. *Théorème de Gerschgorin.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \lambda \in \mathbf{C} \;\middle|\; |\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{i,j}| \right\}.$$

Exercice 2. *Discrétisation du laplacien.*

Soit $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$. On définit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ par, pour tout $(i,j) \in [\![1, N]\!]^2$,

$$A_{i,j} = \begin{cases} 2(N+1)^2 & \text{si } i = j \\ -(N+1)^2 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. *Intégration par parties discrète.*
   Montrer que, pour tout $(f_0, \cdots, f_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$ et tout $(g_0, \cdots, g_{N+1}) \in \mathbf{R}^{N+2}$,
   $$\sum_{i=0}^{N} f_i\,(g_{i+1} - g_i) = -\sum_{i=1}^{N} (f_i - f_{i-1})\, g_i + (f_N\, g_{N+1} - f_0\, g_0).$$
2. En déduire que A est symétrique définie positive.
3. Soit $k \in [\![1, N]\!]$. On définit le vecteur $v^{(k)}$ par
   $$v_j^{(k)} = \sin\left(\frac{k\pi\, j}{N+1}\right), \quad \text{pour } j \in [\![1, N]\!].$$
   Montrer que $v^{(k)}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre à préciser.
4. Calculer $|\!|\!| A^{(N)} |\!|\!|_1$, $|\!|\!| A^{(N)} |\!|\!|_\infty$, $|\!|\!| A^{(N)} |\!|\!|_2$ et $\mathrm{Cond}_2(A^{(N)})$.

Commentaire : les résultats des trois premières questions sont évidemment cohérents avec le fait que A est une discrétisation en les nœuds $\left(\frac{j}{N+1}\right)_{1 \leq j \leq N}$ de l'opérateur $f \mapsto -f''$ agissant sur les fonctions $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

Exercice 3. *Méthode de la puissance.*
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les modes propres de A.
2. Soit $x \in \mathbf{C}^2$ non nul.
   (a) Calculer $(A^k x)_{k\in\mathbf{N}}$.
   (b) On pose $(x^{(k)})_{k\in\mathbf{N}} = \left(\frac{A^k x}{\|A^k x\|}\right)_{k\in\mathbf{N}}$. À quelle condition sur x la suite
   $$\left(\left\langle x^{(k)}, Ax^{(k)}\right\rangle\right)_{k\in\mathbf{N}}$$
   converge-t-elle vers une valeur propre de A ?

Exercice 4. *Méthode QR.*
Calculer les itérations successives de la méthode QR de recherche de valeurs propres pour la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Qu'en conclure ?