Université de Rennes 1 Semestre printemps 2017-2018

Analyse numérique-L3

Feuille d'exercices n° 3

Méthodes variationnelles pour l'algèbre linéaire

Exercice 1. *Un calcul de moindres carrés par la décomposition QR.*

On définit $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^4$ par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une décomposition QR de A par la méthode de Householder.
2. Résoudre le problème de moindes carrés associé à $Ax = b$.
3. Quelle est la taille du résidu ?

Exercice 2. *Approximation polynomiale.*

Soit $m \in \mathbf{N}^*$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbf{R}^m$.

On souhaite approcher au mieux une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ grâce à m mesures $y_1, \ldots, y_m$ en m points $t_1, \ldots, t_m$. Pour cela on se fixe un degré $n \in \mathbf{N}$ et l'on détermine une approximation de f dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Notons $\mathcal{P}_n$ cet espace. On cherche $P \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_m) \end{pmatrix} \right\| = \min_{Q \in \mathcal{P}_n} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q(t_1) \\ \vdots \\ Q(t_m) \end{pmatrix} \right\|.$$

1. Donner la matrice A de l'application

$$\Phi : \quad \mathcal{P}_n \to \mathbf{R}^m, \qquad P \mapsto (P(t_1), \cdots, P(t_m))$$

   dans les bases canoniques de $\mathcal{P}_n$ et $\mathbf{R}^m$.
2. Pour $n = 0$ et 1, résoudre explicitement le problème quand il possède une unique solution.
3. On suppose que les points $t_1, \ldots, t_m$ sont deux à deux distincts.
   À quelle condition sur n la matrice A^*A est-elle inversible ?

Exercice 3. *Produits scalaires et gradients.*

Soit $d \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{C})$ hermitienne définie positive. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire hermitien canonique et $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ le produit scalaire hermitien associé à A.

Soit $b \in \mathbf{C}^d$. On définit

$$\phi : \quad \mathbf{C}^d \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle \; - \; \mathrm{Re}(\langle b, x \rangle)$$

et l'on se donne $x_0 \in \mathbf{C}^d$.

1. Donner la différentielle de ϕ en x_0.
2. Écrire $\nabla\phi(x_0)$ le gradient de ϕ en x_0 associé au produit scalaire euclidien canonique $\mathrm{Re}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$, puis $\nabla_A\phi(x_0)$ le gradient de ϕ en x_0 associé au produit scalaire euclidien $\mathrm{Re}(\langle \cdot, \cdot \rangle_A)$.
3. Minimiser en $\alpha \in \mathbf{R}$ d'abord $\phi(x_0 + \alpha\nabla\phi(x_0))$ puis $\phi(x_0 + \alpha\nabla_A\phi(x_0))$.

Commentaire : les résultats de la dernière question sont évidemment cohérents avec le fait que, pour tout x, on a : $\phi(x) = \frac{1}{2}(\|x - A^{-1}b\|_A^2 - \|A^{-1}b\|_A^2)$ où $\|\cdot\|_A$ est la norme associée à A.

Exercice 4. *Méthode du gradient conjugué.*

On considère

$$A \; = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est symétrique définie positive.
2. On pose $b = (1, 1, 1)^T$. Résoudre par la méthode du gradient conjugué l'équation $Ax = b$, d'abord en partant de $x_0 = (1, 0, 0)^T$ puis en partant de $x_0 = (-1, 1, 1)^T$.