Université de Rennes 1 Semestre printemps 2017-2018

Analyse numérique-L3

Feuille d'exercices n° 2

Systèmes linéaires & factorisations

Exercice 1. *Décomposition LU.*

1. Écrire un algorithme de décomposition LU par identification.
2. Compter le nombre d'opérations.

Exercice 2. *Un exemple de décomposition LU.*

On définit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la factorisation LU de A.
2. En déduire la valeur du déterminant de A.
3. En utilisant la décomposition LU de A, résoudre le système $Ax = b$ pour les valeurs suivantes du vecteur $b \in \mathbf{R}^4$

$$\text{(a)}\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)}\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(c)}\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{(d)}\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. *Décomposition QR par la méthode de Householder.*

Le but de cet exercice est d'obtenir la décomposition $A = QR$ par une méthode plus efficace et plus stable que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt vu en cours : l'algorithme de Householder. Il consiste à multiplier la matrice A de départ par une suite de matrices orthogonales très simples pour obtenir une matrice triangulaire supérieure. C'est l'algorithme utilisé en pratique.

Notations.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dans la suite, les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ sont identifiés à des vecteurs colonnes et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Ainsi, pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, $\|u\|^2 = u^T u$. On note également $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

1. À tout vecteur $u \in \mathbf{R}^n$ on associe la matrice de Householder définie par

$$H(u) \ = \ \begin{cases} \mathrm{I}_n - 2\dfrac{uu^T}{\|u\|^2} & \text{si } u \neq 0 \\ \mathrm{I}_n & \text{sinon} \end{cases}.$$

Quand u est non nul, $H(u)$ est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à u.

(a) Vérifier que, pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, $H(u)$ est symétrique et othogonale.

(b) Soit e un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$.
Montrer que, pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, si $e^T v < \|v\|$, alors

$$H(v - \|v\| e)\, v = \|v\|\, e.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (a) Déterminer une matrice de Householder H telle que la première colonne de la matrice HA soit un multiple positif de e_1.
   (b) Construire une suite de matrices de Householder $(H^{(k)})_{1 \leq k \leq n}$ et une suite de matrices $(A^{(k)})_{1 \leq k \leq n+1}$ telles que
      (i) $A^{(1)} = A$;
      (ii) pour tout $1 \leq k \leq n$, $A^{(k+1)} = H^{(k)} A^{(k)}$;
      (iii) $A^{(n+1)}$ est triangulaire à coefficients diagonaux positifs.
   (c) Montrer que l'algorithme précédent fournit une décomposition QR et que le nombre N_{op} de multiplications nécessaires à sa mise en œuvre vérifie $N_{op} \sim \dfrac{2n^3}{3}$.
3. Déterminer la décomposition QR de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. *Factorisation QR.*
En procédant à une orthonormalisation de Gram-Schmidt, calculer une factorisation QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *Convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.*
Examiner la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *Un exemple de résolution par la méthode de Gauss-Seidel.*
On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Partant de $x^{(0)}$, quelle approximation de la solution x de $Ax = b$ donne la méthode de Gauss-Seidel au bout de 3 itérations ?
2. Quelles sont les tailles de l'erreur et du résidu ?