Feuille d'exercices n° 1

Normes matricielles & conditionnement

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbf{K}^n$, $\|\!|\cdot|\!\|$ et $\mathrm{cond}(\cdot)$ la norme subordonnée et le conditionnement associés.

Exercice 1. Dans $E = \mathbf{C}^3$ muni de sa structure hermitienne canonique, on considère le sous-espace

$$F \;=\; \left\{\; (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3 \mid x_1 - x_2 + ix_3 = 0 \;\right\}\;.$$

1. Déterminer l'orthogonal de F.
2. On note p_F la projection orthogonale sur F.
   Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbf{C}^3$.
3. Trouver une base orthonormale de F.

Exercice 2. Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$.

1. Montrer que
   $$\mathrm{Im}(A) \;=\; (\ker(A^*))^{\perp} \qquad \text{et} \qquad \ker(A) \;=\; (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp}$$
   où $\perp$ note l'orthogonale pour le produit scalaire canonique.
2. On suppose $m = n$. Montrer que si v est un vecteur propre de A^* alors $\{v\}^{\perp}$ est stable par A.

Exercice 3. *Calcul de normes subordonnées.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note $\|\!|A|\!\|_p$, pour $1 \leq p \leq \infty$, la norme subordonnée de A relativement à la norme vectorielle ℓ^p sur $\mathbf{K}^n$.

1. Montrer que si A est diagonale et $1 \leq p \leq \infty$, alors $\|\!|A|\!\|_p = \rho(A)$, où $\rho(\,\cdot\,)$ désigne le rayon spectral.
2. *Norme subordonnée à la norme 2.*
   (a) Montrer que si A est une matrice normale, alors $\|\!|A|\!\|_2 = \rho(A)$.
   (b) Montrer que $\|\!|A|\!\|_2 = \sqrt{\|\!|A^*A|\!\|_2}$.
   (c) En déduire que
   $$\|\!|A|\!\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|\!|A^*|\!\|_2.$$

Exercice 4. *Conditionnement associé à la norme 2.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible et $\|\!|\cdot|\!\|_2$ la norme subordonnée à la norme ℓ^2 sur $\mathbf{K}^n$. On note $\mathrm{cond}_2(\cdot)$ le conditionnement associé.
Ordonnons $0 \leq \mu_1(A) \leq \ldots \leq \mu_n(A)$ les racines carrées des valeurs propres de A^*A. Ces valeurs sont appelées *valeurs singulières* de A.

1. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$.
2. Montrer que si A est une matrice normale alors $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}{\min\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}$.

Exercice 5. *Deux autres interprétations du conditionnement.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible.

1. (a) Soit $b \in \mathbf{K}^n$ non nul, $x \in \mathbf{K}^n$ tel que $Ax = b$ et un couple $(\Delta A, \Delta x) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathbf{K}^n$ tel que $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$. Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\!|\Delta A|\!\|}{\|\!|A|\!\|}.$$

   (b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul, une matrice ΔA et un vecteur Δx vérifiant les relations ci-dessus et tels que l'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

2. (a) Montrer que pour toute matrice singulière B, on a

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)} \leq \frac{\|\!|A - B|\!\|}{\|\!|A|\!\|}.$$

   (b) Soit $u \in \mathbf{K}^n$ tel que $\|u\|_2 = 1$ et $\|A^{-1}u\|_2 = \|\!|A^{-1}|\!\|_2$. On pose $B_0 = A - \dfrac{u(A^{-1}u)^*}{\|\!|A^{-1}|\!\|_2^2}$.
   Montrer que $\|\!|A - B_0|\!\|_2 = \dfrac{1}{\|\!|A^{-1}|\!\|_2}$ et en déduire que

$$\frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)} = \inf \left\{ \frac{\|\!|A - B|\!\|_2}{\|\!|A|\!\|_2} \;\middle|\; B \text{ singulière} \right\}.$$

   Autrement dit, plus une matrice est mal conditionnée, plus elle est proche d'être singulière donc difficile à inverser numériquement, et réciproquement.

Exercice 6. *Un exemple.* On note pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système $A_\varepsilon x = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}$
2. Estimer à l'aide de la question 2.(a) de l'exercice précédent la valeur de $\mathrm{cond}_2(A_\varepsilon)$ et comparer, dans la limite $\varepsilon \to 0$, à la valeur exacte de $\mathrm{cond}_2(A_\varepsilon)$.