Université de Rennes 1 Semestre printemps 2017-2018

Analyse numérique - L3

Contrôle final

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Dans tout ce qui suit on pourra identifier les vecteurs de $\mathbf{C}^d$, $d \in \mathbf{N}^*$, aux colonnes de taille $d \times 1$.
Pour $p \in [1, \infty]$, $\|\cdot\|_p$ désigne la norme ℓ^p.

Exercice 1. Matrices de Hessenberg.

Soit $d \in \mathbf{N}^*$. On considère ici des matrices carrées réelles de taille d. On dit qu'une telle matrice A est de Hessenberg si $A_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, d]\!]^2$ tel que $i \geq j + 2$.

1. (a) Montrer que si A est triangulaire supérieure et B est de Hessenberg alors AB et BA sont de Hessenberg.

   (b) En déduire que si A est inversible et de Hessenberg alors la matrice orthogonale de sa décomposition QR est une matrice de Hessenberg.

   (c) En déduire que si A est inversible et de Hessenberg alors la suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ construite à partir de A par la méthode QR de recherche de valeurs propres est constituée de matrices de Hessenberg.

2. Dans cette partie de l'exercice, $(e_1, \cdots, e_d)$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^d$ et $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne canonique. À tout vecteur $u \in \mathbf{R}^d$ on associe la matrice de Householder définie par

$$H(u) \;=\; \begin{cases} \mathrm{I}_d - 2\dfrac{uu^{\mathrm{T}}}{\|u\|^2} & \text{si } u \neq 0 \\ \mathrm{I}_d & \text{sinon} \end{cases} .$$

   (a) Montrer que pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ et tout $u \in \mathrm{Vect}\,(\{\, e_k \,|\, k \in [\![j+1, d]\!] \,\})$,
   si $v = u - \|u\|e_{j+1}$ et $H_{j,u} = H(v)$ alors

$$H_{j,u}\, u = \|u\|\, e_{j+1} \qquad \text{et,} \quad \text{pour tout } k \in [\![1, j]\!]\,, \qquad H_{j,u}\, e_k = e_k\,.$$

   (b) Proposer un algorithme pour associer à toute matrice A une matrice de Hessenberg B et une matrice orthogonale Q telles que $A = QBQ^{-1}$.

<u>Exercice 2.</u> Décomposition de champs de vecteurs.

Dans cet exercice, toutes les fonctions sont supposées $\mathcal{C}^\infty$.
Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $x_0 \in \mathbf{R}^d$ une donnée initiale et f, $g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ deux champs de vecteurs. On cherche à approcher la solution du problème de Cauchy

$$x(0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \big(\, \forall t\,, \quad x'(t) \;=\; f(t, x(t)) \;+\; g(t, x(t)) \,\big)\,. \tag{1}$$

À cet effet, on fixe un pas de temps $h > 0$ et l'on note $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des temps d'approximations. On se donne des flux numériques $\phi_f \,:\, \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^d$ définissant un schéma numérique

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} \;=\; x_n \,+\, h\,\phi_f(t_n, x_n, h)$$

pour l'équation différentielle $\forall t,\ x'(t) = f(t, x(t))$ et $\phi_g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^d$ définissant un schéma numérique

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} \;=\; x_n \,+\, h\,\phi_g(t_n, x_n, h)$$

pour l'équation différentielle $\forall t,\ x'(t) = g(t, x(t))$.

1. **Schéma de Lie.** On définit un schéma pour (1) par, pour tout n,

$$x_n^{(1)} \;=\; x_n \,+\, h\ \phi_f(t_n, x_n, h) \qquad \text{puis} \qquad x_{n+1} \;=\; x_n^{(1)} \,+\, h\ \phi_g(t_n, x_n^{(1)}, h)\,.$$

   (a) Récrire explicitement ce schéma comme un schéma à un pas

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} \;=\; x_n \,+\, h\,\phi^L_{f+g}(t_n, x_n, h)\,.$$

   (b) Montrer que si ϕ_f et ϕ_g définissent des schémas consistants alors il en est de même pour ϕ^L_{f+g}.

2. **Schéma de Strang.** On suppose désormais que ϕ_f et ϕ_g définissent des schémas consistants au moins à l'ordre 2. On définit un schéma pour (1) par, pour tout n,

$$x_n^{(1)} \;=\; x_n \,+\, \frac{h}{2}\ \phi_f\left(t_n, x_n, \tfrac{h}{2}\right) \qquad \text{puis} \qquad x_n^{(2)} \;=\; x_n^{(1)} \,+\, h\ \phi_g(t_n, x_n^{(1)}, h)\,,$$

   enfin

$$x_{n+1} \;=\; x_n^{(2)} \,+\, \frac{h}{2}\ \phi_f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, x_n^{(2)}, \tfrac{h}{2}\right)$$

   (a) Récrire explicitement ce schéma comme un schéma à un pas

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} \;=\; x_n \,+\, h\,\phi^S_{f+g}(t_n, x_n, h)\,.$$

   (b) Montrer que ϕ^S_{f+g} définit un schéma consistant pour (1).

   (c) Vérifier que pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$,

$$\partial_h \phi^S_{f+g}(t, x, 0) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\big(\, \partial_t(f+g)(t,x) \,+\, \mathrm{d}_x(f+g)(t,x) \cdot ((f+g)(t,x)) \,\big)\,,$$

   où $\mathrm{d}_x(\cdot)$ note la différentielle (partielle) par rapport à la variable x.

   (d) Qu'en conclure ?

Exercice 3. **Applications directes.**

Les questions sont réputées indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre. Les détails et la nature des calculs nécessaires à l'identification des réponses aux questions qui suivent devront être présentés avec netteté et précision. En particulier il appartient à l'étudiant d'introduire explicitement *les notations qui lui sembleront nécessaires. Attention : aucun résultat brut ne sera pris en compte sans justification.*

1. Relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$, quel est le conditionnement de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$?
2. Déterminer $x \in \mathbf{R}^2$ minimisant $\|Ax - b\|_2$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. Partant de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, quelle approximation de la valeur propre de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de plus grand module obtient-on par la méthode de la puissance au bout de 3 itérations ?
4. Au bout d'une itération quelle approximation d'une racine de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^4 - 1$ obtient-on par la méthode de Newton en partant de 2 ?
5. Quelle approximation d'un minimiseur local de $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x^3 + y^4$ obtient-on par la méthode du gradient à pas constant $\frac{1}{4}$ après deux itérations partant de $(1, 1)$?
6. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner en fonction de $h(0)$, $h(\varepsilon)$ et $h(-\varepsilon)$ la forme de Newton du polynôme d'interpolation de $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ aux nœuds 0, ε et $-\varepsilon$ (dans cet ordre).
7. Quelle approximation de
$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 \mathrm{d}x$$
obtient-on par la méthode des rectangles à gauche avec des points équidistants de pas $\frac{1}{4}$?