Université de Rennes 1 Semestre printemps 2016-2017

Analyse numérique - L3

Contrôle final

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Quadrature à 3 points.

Soit $\theta \in]0,1[$ et $f : [0,1] \to \mathbf{R}$.
On note P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds 0, θ et 1.

1. Donner la forme de Newton de P.
2. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x$ en fonction de $f(0)$, $f(\theta)$ et $f(1)$.
3. Calculer cette valeur en fonction de θ pour les fonctions

   (a) $f : [0,1] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^3$; (b) $f : [0,1] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x(1-x)(x-\frac{1}{2})$.

4. Pour quelles valeurs de θ la méthode de quadrature élémentaire associée à cette méthode d'interpolation est-elle exacte pour les fonctions polynomiales de degré au plus 3 ?

Exercice 2. Stabilité des schémas localement lipschitziens.

Soit $d \in \mathbf{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. On se donne $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{R}^d$.
Soit $x : [a,b] \to \Omega$ continu et

$$\phi : [a,b] \times \Omega \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^d, \qquad (t,y,h) \mapsto \phi(t,y,h)$$

continu et localement lipschitzien en sa seconde variable.

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$K_\delta := \bigcup_{t \in [a,b]} \overline{B}(x(t),\delta) \subset \Omega\,.$$

2. Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que, pour tout $(t,y,z,h) \in [a,b] \times (K_\delta)^2 \times [0,1]$, on a

$$\|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)\| \leq L\,\|y-z\|\,.$$

3. Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$. Pour tout $j \in [\![0, N-1]\!]$, on pose

$$\mathcal{E}_j = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \phi(t_j, x(t_j), t_{j+1} - t_j)\,.$$

   On considère alors

$$\eta = \max_{0 \leq j \leq N-1} (t_{j+1} - t_j) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E} = \sum_{j=0}^{N-1} (t_{j+1} - t_j)\,\|\mathcal{E}_j\|$$

et l'on suppose $\eta \leq 1$ et $\mathrm{e}^{L(b-a)}\mathcal{E} \leq \delta$. Montrer que l'on peut définir $(y_j)_{j\in[\![0,N]\!]} \in \Omega^{N+1}$ par récurrence par $y_0 = x(a)$ et, pour tout $j \in [\![0, N-1]\!]$,

$$y_{j+1} \;=\; y_j \;+\; (t_{j+1} - t_j)\,\phi(t_j, y_j, t_{j+1} - t_j)$$

et que, pour tout $j \in [\![0, N]\!]$,

$$\|y_j - x(t_j)\| \;\leq\; \mathrm{e}^{L(t_j-a)} \sum_{k=0}^{j-1} (t_{k+1} - t_k)\,\|\mathcal{E}_k\| \;\leq\; \mathrm{e}^{L(b-a)}\mathcal{E}\,.$$

<u>Exercice 3.</u> Applications directes.

Les questions sont réputées indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre. Les détails et la nature des calculs nécessaires à l'identification des réponses aux questions qui suivent devront être présentés avec netteté et précision. En particulier il appartient à l'étudiant d'introduire explicitement *les notations qui lui sembleront nécessaires. Attention : aucun résultat brut ne sera pris en compte sans justification.*

1. Donner la norme subordonnée à la norme ℓ^∞ de la matrice $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.
2. Donner la norme subordonnée à la norme ℓ^2 de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Donner la décomposition LU de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
4. Donner la décomposition QR de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Donner $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ minimisant
$$\left\| a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2$$
où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne canonique.
6. Donner l'approximation de la plus grande valeur propre en module de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ obtenue par la méthode de la puissance au bout de 4 itérations en partant de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. Pour la fonction
$$f \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \quad x \mapsto x^2 + x$$
donner l'approximation d'un zéro obtenue après 2 étapes de la méthode de Newton partant de 1.
8. Pour la fonction
$$f \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,, \quad (x, y) \mapsto x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - xy + x$$
donner l'approximation d'un minimiseur obtenue après 4 étapes par la méthode du gradient à pas fixe de pas $\frac{1}{2}$ en partant de $(1, 0)$.
9. Donner l'approximation de la valeur $x(1)$ de la solution $x :]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\to \mathbf{R}$ du problème de Cauchy
$$x(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } t\,, \quad x'(t) \;=\; t\,(x(t))^2$$
fournie par le schéma d'Euler explicite de pas constant $\frac{1}{3}$.