Université de Rennes 1 Semestre printemps 2015-2016

Analyse numérique - L3

Contrôle final

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Interpolation de Hermite.

Dans tout ce qui suit, pour $m \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_m[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus m.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x_0, \cdots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, on note

$$L_j(X) \;=\; \frac{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(X - x_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x_j - x_k)}$$

le j-ième polynôme de Lagrange associé aux points $x_0, \cdots, x_n$. On considère

$$\Phi \;:\; \mathbf{R}_{2n+1}[X] \;\to\; \mathbf{R}^{2n+2}, \quad P \longmapsto (P(x_0), \cdots, P(x_n), P'(x_0), \cdots, P'(x_n)).$$

   (a) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $\Phi(P)$ pour

$$P(X) \;=\; (X - x_j) \times (L_j(X))^2 \qquad \text{et} \qquad P(X) \;=\; \left(1 - 2\frac{L_j'(x_j)}{L_j(x_j)}(X - x_j)\right) \times (L_j(X))^2.$$

   Consigne : on veillera à exprimer les réponses dans la base canonique $(e_k)_{1\leq k\leq 2n+2}$ de $\mathbf{R}^{2n+2}$.

   (b) En déduire que Φ est une bijection.

2. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On se donne $n \in \mathbf{N}$ et $x_0, \cdots, x_n$ des réels de $[a, b]$ deux à deux distincts. On considère $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n+3}$. On note Π le polynôme

$$\Pi(X) \;=\; \prod_{k=0}^{n}(X - x_k)$$

et P l'unique polynôme de $\mathbf{R}_{2n+1}[X]$ tel que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$P(x_j) \;=\; f(x_j) \qquad \text{et} \qquad P'(x_j) \;=\; f'(x_j).$$

   (a) Soit $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \cdots, x_n\}$.

      i. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que le polynôme $Q_\alpha(X) = P(X) + \alpha(\Pi(X))^2$ vérifie

$$Q_\alpha(x) \;=\; f(x) \qquad \text{et, pour tout } j \in [\![0, n]\!], \quad Q_\alpha(x_j) \;=\; f(x_j) \quad \text{et} \quad Q_\alpha'(x_j) \;=\; f'(x_j).$$

      On note α_0 cet unique α.

ii. Montrer qu'il existe un unique $\beta \in \mathbf{R}$ tel que le polynôme

$$R_\beta(X) \;=\; Q_{\alpha_0}(X) \;+\; \beta\,(X-x)\,(\Pi(X))^2$$

vérifie

$$\begin{aligned} & R_\beta(x) \;=\; f(x)\,, \qquad R'_\beta(x) \;=\; f'(x)\,, \\ \text{et, pour tout } j \in [\![0,n]\!]\,, \qquad & R_\beta(x_j) \;=\; f(x_j) \qquad \text{et} \qquad R'_\beta(x_j) \;=\; f'(x_j)\,. \end{aligned}$$

On note β_0 cet unique β.

iii. Montrer qu'il existe $(\xi,\eta) \in [a,b]^2$ tel que

$$\alpha_0 \;=\; \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \qquad \text{et} \qquad \beta_0 \;=\; \frac{f^{(2n+3)}(\eta)}{(2n+3)!}\,.$$

(b) En déduire que

$$\begin{aligned} \max_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)| \;&\leq\; \frac{(b-a)^{2n+2}}{(2n+2)!} \max_{[a,b]} |f^{(2n+2)}| \\ \max_{x\in[a,b]} |f'(x)-P'(x)| \;&\leq\; \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!} \max_{[a,b]} |f^{(2n+2)}| \;+\; \frac{(b-a)^{2n+2}}{(2n+3)!} \max_{[a,b]} |f^{(2n+3)}|\,. \end{aligned}$$

<u>Exercice 2.</u> Méthode de la sécante.

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ et $x_* \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_*) = 0$ et $f'(x_*) \neq 0$.
On pose

$$\Omega \;=\; \left\{\; (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; f(x) \neq f(y) \quad \text{ou} \quad (x = y \quad \text{et} \quad f'(x) \neq 0) \;\right\}$$

et l'on définit

$$\phi \,:\, \Omega \to \mathbf{R}^2\,, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x f(y) - y f(x)}{f(y)-f(x)} & \text{si } x \neq y \\ x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Justifier que Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.
   Désormais on admettra par ailleurs que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Vérifier que si $(x,y) \in \Omega$, alors $(y,x) \in \Omega$ et $\phi(x,y) = \phi(y,x)$.
3. Montrer que si $y \in \mathbf{R}$ est tel que $(x_*,y) \in \Omega$ alors $\phi(x_*,y) = x_*$ et $\frac{\partial}{\partial y}\phi(x_*,y) = 0$.
4. En déduire que si $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ est tel que $[x_*,x] \times [x_*,y] \subset \Omega$ alors

$$\phi(x,y) - x_* \;=\; (x-x_*)\,(y-x_*) \int_0^1\!\!\int_0^1 \tfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\phi\;(x_* + t(x-x_*), x_* + s(y-x_*))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,.$$

<u>Exercice 3.</u> Applications directes.

Les questions sont réputées indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre. Les détails et la nature des calculs nécessaires à l'identification des réponses aux questions qui suivent devront être présentés avec netteté et précision. En particulier il appartient à l'étudiant d'introduire *explicitement* les notations qui lui sembleront nécessaires. Attention : aucun résultat brut ne sera pris en compte sans justification.

1. Quelle est la solution du problème de moindres carrés associé au second membre $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?
2. Partant du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quelle approximation d'un vecteur propre unitaire associé au rayon spectral de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ fournit la méthode de la puissance au bout de 3 itérations ?
3. Partant de 2, quelle approximation d'un zéro de la fonction
$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x\,(1-x)$$
fournit la méthode de Newton au bout d'une itération ?
4. Partant de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quelle approximation d'un point critique de la fonction
$$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \tfrac{1}{2}x^2 + y^2 + 2z^2$$
fournit la méthode du gradient à pas fixe $\frac{1}{2}$ au bout de deux itérations ?
5. Pour la fonction
$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$$
quel polynôme d'interpolation fournit l'interpolation de Lagrange aux nœuds 0, 1 et 2 ?
6. Avec des nœuds équidistribués avec un pas $\frac{1}{2}$, quelle approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$ fournit la méthode de quadrature composée dite du point milieu ?
7. Avec des temps d'approximation équidistribués avec un pas $\frac{1}{2}$, quelle approximation de la valeur au temps 1 de l'éventuelle solution $x\,:\;[0,1] \to \mathbf{R}$ du problème de Cauchy
$$x(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \big(\forall t \in [0,1]\,, \quad x'(t) \;=\; -(x(t))^3 \;+\; t^2\,x(t)\big)$$
fournit le schéma d'Euler explicite ?