Université de Rennes 1 Semestre printemps 2017-2018

Analyse numérique - L3

Devoir n° 2

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.

Les questions sont réputées indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Pour les deux paires (A, b) de matrice/second membre qui suivent

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

résoudre le problème de moindres carrés associé et donner la taille du résidu (en norme ℓ^2).

Exercice 2. On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Partant de $x^{(0)}$, quelle approximation de la solution x de $Ax = b$ donne la méthode de Jacobi au bout de 2 itérations ?
   (b) Quelles sont les tailles de l'erreur et du résidu ?
2. Reprendre les deux questions précédentes avec cette fois la méthode de Gauss-Seidel.

Exercice 3. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Donner l'approximation du rayon spectral de A obtenue par la méthode de la puissance partant de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ au bout d'une itération.
3. Calculer l'erreur associée à l'approximation précédente.

Exercice 4. On considère une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par la méthode QR de recherche des valeurs propres à partir d'une certaine matrice A. On note $(Q_k, R_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite de décompositions QR correspondantes. En particulier on a $A_0 = A$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $Q_k R_k = A_k$ et $R_k Q_k = A_{k+1}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $A^{k+1} = Q_0 (A_1)^k R_0$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^{k+1} = Q_0 \cdots Q_k \, R_k \cdots R_0$
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A_k = (\widetilde{Q}_k)^* \, A \, \widetilde{Q}_k$ où $(\widetilde{Q}_k, \widetilde{R}_k)$ désigne la décomposition QR de A^k.

Exercice 5. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une *démonstration* ou un *contre-exemple*. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. La norme ℓ^2 de $(1,1,1)$ est 2.
2. Pour tout vecteur colonne non nul v, $v\,v^*$ est la matrice d'une projection orthogonale.
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice de la projection sur $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ le long de $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
4. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice de la projection sur $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ le long de $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
5. $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de la projection sur $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ le long de $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
6. La norme de $D = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ subordonnée à la norme ℓ^2 est $2\sqrt{17}$.