**Université de Rennes 1** Semestre printemps 2016-2017

Analyse numérique - L3

---

**Devoir n° 2**

---

*L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.*
*Les exercices sont réputés indépendantes et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.*

**Exercice 1.** Soit $\lambda \in \mathbf{C}^*$. On munit $\mathbf{C}^2$ de sa structure hermitienne canonique et l'on considère

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. Donner explicitement $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$. *Consigne :* on veillera à démontrer le résultat.
2. En déduire que si $X_0 = (x_0, y_0)$ est tel que $y_0 \neq 0$ alors la méthode de la puissance partant de $X_0$ est définie globalement et la suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ainsi construite vérifie

$$X_k \overset{k\to\infty}{=} \left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)^{(k-1)} \left(\frac{y_0}{|y_0|}, 0\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \qquad \text{et} \qquad \langle X_k, AX_k\rangle \overset{k\to\infty}{=} \lambda + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire hermitien canonique (linéaire en son second membre).

**Exercice 2.** On cherche à approcher un zéro par dichotomie. On part d'un intervalle de longueur 4. Au bout de combien d'itérations peut-on obtenir un intervalle de longueur $2^{-6}$ dans lequel on peut garantir que se trouve un zéro ?

**Exercice 3.** On considère la fonction

$$f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^3 - x^2.$$

1. Déterminer les zéros de $f$.
2. Pour lesquels de ces zéros peut-on assurer que le calcul approché par la méthode de Newton converge au moins à l'ordre 2 ?
3. Calculer les deux premières itérations de la méthode de Newton partant des points suivants

   (a) $x_0 = 1/4$ ; (b) $x_0 = 3/2$.

**Exercice 4.** Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une *démonstration* ou un *contre-exemple*. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Appliquée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, la méthode $QR$ produit une suite convergente de matrices $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$.
2. La fonction $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x + \cos(\frac{x}{5})$ est strictement contractante.
3. Pour tout $a > 0$, les points critiques de $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto a\,x^2 + 3x + 1$ sont des minima globaux.
4. Les points critiques de la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto xy - x - y$ sont des extrema locaux.