Université de Rennes 1 Semestre printemps 2015-2016

Analyse numérique - L3

Devoir n° 2

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les questions sont réputées indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Pour les paires (A, b) qui suivent, résoudre le problème de moindres carrés de minimisation en x de $\|Ax - b\|_2^2$ et donner la taille du résidu.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Pour les paires (A, x_0) qui suivent :

— déterminer si les valeurs propres de A sont de modules distincts ;
— caluler les cinq premières itérations de la méthode de la puissance ;
— donner l'approximation de la plus grande valeur propre correspondant à la cinquième itération.

1. $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; 3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Pour les triplets (f, X_0, ρ) qui suivent :

— déterminer les points critiques de f ;
— déterminer parmi ces points lesquels sont des minima locaux ;
— calculer le rayon spectral des Hessiennes aux minima locaux ;
— calculer les trois premières itérations de la méthode du gradient à pas fixe ρ et partant de X_0.

1. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$,
   $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\rho = \frac{1}{2}$;
2. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x^2 - 1)^2$,
   $X_0 = 2$ et $\rho = \frac{1}{24}$.

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Le conditionnement en norme ℓ^2 de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\sqrt{(3 + \sqrt{5})/(3 - \sqrt{5})}$.
2. Relativement à la norme euclidienne ℓ^2, le conditionnement spectral de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est 2.
3. Pour tout $a \in \mathbf{R}$ tel que $|a| \leq 1$, la fonction $\Phi_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto a\,x$ possède un unique point fixe.
4. Partant de $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la méthode de la puissance permet de déterminer le rayon spectral de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Partant de $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, la méthode de la puissance permet de déterminer le rayon spectral de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.