Université de Rennes 1 Semestre printemps 2017-2018

Analyse numérique - L3

Devoir n° 1

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les questions sont réputées indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Donner les matrices dans la base canonique des applications linéaires de $\mathbf{R}^2$ suivantes

1. la projection orthogonale sur la droite dirigée par $(1,1)$;
2. la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par $(1,1)$;
3. la projection sur la droite dirigée par $(1,0)$ parallèlement à $(-1,1)$;
4. la symétrie par rapport à l'origine ;
5. la rotation d'angle $\pi/2$;
6. la rotation d'angle $\pi/4$.

Exercice 2. Calculer les normes subordonnées aux normes ℓ^1, ℓ^2, ℓ^∞ et le rayon spectral de la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. On se donne $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)}) \in \mathbf{C}^m$ puis l'on définit par récurrence $(x^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ par pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m} x_\ell^{(k)} \qquad \text{puis, pour } j \geq 2\,, \qquad x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - x_1^{(k+1)}\,.$$

Compter en fonction de n et m le nombre d'additions et le nombre de divisions que l'on doit effectuer pour calculer $x^{(n)}$. *Indication :* on comptera les soustractions comme des additions.

Exercice 4. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbf{C}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$. On considère

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. À quelle condition la matrice A admet-elle une décomposition LU ?
2. On suppose cette condition satisfaite. Donner cette décomposition LU.
3. On suppose cette condition violée. Donner une décomposition PLU de A.

Exercice 5. Donner les décompositions QR des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une *démonstration* ou un *contre-exemple*. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une projection.
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie.
3. Toute matrice d'une symétrie est symétrique.
4. Pour tout réel a tel que $a \leq 2$, le conditionnement de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ subordonné à la norme ℓ^2 est $\frac{2}{a}$.
5. Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la suite de matrices $\left(A^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers la matrice nulle.
6. Si A est la matrice d'une projection, alors la suite de matrices $\left(A^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ converge.