Université de Rennes 1 Semestre printemps 2016-2017

Analyse numérique - L3

Devoir n° 1

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les questions sont réputées indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Calculer les normes subordonnées aux normes ℓ^1, ℓ^2, ℓ^∞ et le rayon spectral de la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Donner lorsqu'elle existe *la* décomposition LU des matrices qui suivent, et lorsque ce n'est pas possible en donner *une* décomposition PLU,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Donner la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{C}^4$ tel que $a\,d \neq 0$. On considère

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice d'itération pour la méthode de Gauss-Seidel appliquée à A.
2. En déduire qu'appliquée à A la méthode de Gauss-Seidel converge si et seulement si $|bc| < |ad|$.
3. Montrer également qu'appliquée à A la méthode de Jacobi converge si et seulement si $|bc| < |ad|$.

Exercice 5. Pour la matrice A et le second membre b donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

résoudre le problème de moindres carrés de minimisation en x de $\|Ax - b\|_2^2$ et donner la taille du résidu.

Exercice 6. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une *démonstration* ou un *contre-exemple*. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les normes ℓ^p sur $\mathbf{C}^n$, notées $\|\cdot\|_p$, vérifient, pour tout $(p,q) \in [1,\infty]^2$ tel que $p \leq q$ et tout $x \in \mathbf{C}^n$, $\|x\|_p \leq \|x\|_q$.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, la norme de A subordonnée à la norme ℓ^2 sur $\mathbf{C}^n$ est donnée par
$$|\!|\!| A |\!|\!|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|^2}\,.$$
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont le rayon spectral $\rho(A)$ est tel que $\rho(A) \leq 1$, la matrice $(\mathrm{I}_n - A)$ est inversible.
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice A^*A est hermitienne définie positive.