

Devoir n° 1

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.

Les questions sont réputées indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Pour les paires (A, b) qui suivent, résoudre $Ax = b$ ou le problème de moindres carrés associé, en commençant dans ce cas par justifier soigneusement que la matrice A est injective.

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Donner lorsqu'elle existe la décomposition LU des matrices qui suivent, et lorsque ce n'est pas possible en donner une décomposition PLU,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Donner la décomposition QR des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Quel que soit le réel $a \in \mathbf{R}$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2+a \end{pmatrix}$ est normale.
2. Quel que soit l'entier strictement positif $n \in \mathbf{N}^*$, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |A_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |A_{i,j}|$$

est inversible.

3. Quel que soit le réel $a \in \mathbf{R}$, la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU.
4. Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la suite de matrices $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers la matrice nulle.
5. Appliquée à $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, la méthode de Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires converge.