Université de Rennes Semestre printemps 2023-2024
M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Travaux pratiques n° 3
INITIATION À LA RÉSOLUTION PAR FOURIER
D'ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

Consigne : Au plus tard **le 16 avril 2024**, les étudiants doivent envoyer leur fichier `Jupyter` (extension `.ipynb`) à

— `luis-miguel.rodrigues@univ-rennes.fr` pour les groupes Beaulieu ;
— `Adrien.Laurent@inria.fr` pour le groupe Magistère.

Les questions portant un astérisque * ne sont pas utiles à la programmation et peuvent donc être sautées dans un premier temps.

On se propose d'utiliser la transformée de Fourier discrète comme outil de résolution approchée des équations aux dérivées partielles d'évolution.

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on introduira $x^{(N)} := (x_j^{(N)})_{j\in[\![0,N]\!]}$ où, pour $j \in [\![0,N]\!]$, $x_j^{(N)} := j/(N+1)$. On supposera toujours que N est pair par la suite pour éviter les parties entières.
On rappelle que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est $\mathbf{Z}$-périodique, alors en appliquant d'abord la commande `numpy.fft.fft` puis `numpy.fft.fftshift` et en multipliant le tout par $N+1$ au vecteur $(f(x_j^{(N)}))_{j\in[\![0,N]\!]}$, on obtient un vecteur de longeur $N+1$ approchant les coefficients de Fourier de f, $(c_k^1(f))_{k\in[\![-N,N]\!]}$. Par ailleurs, diviser par $N+1$ et appliquer `numpy.fft.ifftshift` puis `numpy.fft.ifft` permet de retouver $(f(x_j^{(N)}))_{j\in[\![0,N]\!]}$.

Exercise 1. En préalable, pour se familiariser avec la représentation des fonctions de deux variables, exécuter et compendre

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N=1000
x=np.linspace(0,N,N+1)
y=np.reshape(x,(1,N+1))
z=np.reshape(x,(N+1,1))
A=z.dot(y)
P=plt.imshow(A,extent=[0,N+1,0,N+1],aspect='auto',origin ='lower')
plt.colorbar(P)
```

Exercise 2.

1. (a) Pour $k \in \mathbf{Z}$, déterminer l'unique fonction $A_k : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ telle que

$$\theta_k \;:\; \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,, \qquad (t,x) \mapsto A_k(t)\, \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,x}$$

vérifie $\theta_k(0,\cdot) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,\cdot}$, $\partial_t \theta_k(0,\cdot)$ soit nul et $\partial_t^2 \theta_k = \partial_x^2 \theta_k$.

(b) On considère la fonction $f \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $\mathbf{Z}$-périodique, dont la restriction à $[0,1[$ est donnée par

$$[0,1[\to \mathbf{C}\,, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-200\,(x-\frac{1}{2})^2}\,.$$

On va calculer une approximation de la valeur au temps t de la solution θ de $\partial_t^2\theta = \partial_x^2\theta$, $\theta(0,\cdot) = f$, $\partial_t\theta(0,\cdot) \equiv 0$, de la manière suivante : pour un certain N on calcule une approximation des coefficients de Fourier de f comme rappelé dans l'introduction, on multiplie ces coefficients par $(A_k(t))_{k \in [\![-N/2,N/2]\!]}$ terme à terme, on applique l'inverse des approximations des coefficients de Fourier rappelé dans l'introduction.
Calculer ainsi une approximation de θ avec $N = 1000$ en cent temps t équidistants entre 0 et 3. On pourra utiliser la commande `numpy.vstack` pour ajouter les valeurs à une matrice.
Représenter les (parties réelles des) valeurs calculées comme dans le premier exercice (avec des axes adaptés).

2. Nous allons maintenant étendre la stratégie au cas où la période n'est pas 1.

(a) Pour $M > 0$, vérifier que si θ vérifie $\partial_t^2\theta = \partial_x^2\theta$ et $\theta^{[M]}$ est défini par

$$\theta^{[M]}(t,x) = \theta(t, 2M(x - \tfrac{1}{2}))$$

alors

$$\partial_t^2 \theta^{[M]} \;=\; \frac{1}{(2M)^2} \partial_x^2 \theta^{[M]}$$

et que si $\theta(t,\cdot)$ est $2M\mathbf{Z}$-périodique, alors $\theta^{[M]}(t,\cdot)$ est $\mathbf{Z}$-périodique.

(b) Utiliser la question précédente avec $M = 100$ pour calculer une approximation de paramètre $N = 100000$, en cent temps t équidistants entre 0 et 3 de la solution θ de $\partial_t^2\theta = \partial_x^2\theta$, $\theta(0,\cdot) = g$, $\partial_t\theta(0,\cdot) \equiv 0$, où g est la fonction $200\mathbf{Z}$-périodique, dont la restriction à $[-100,100[$ est donnée par

$$[-100,100[\to \mathbf{C}\,, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-200\,x^2}\,.$$

Représenter comme dans le premier exercice (avec des axes adaptés) les (parties réelles des) approximations de $\theta_{|[0,3]\times[-6,6]}$.

Exercise 3.

1. (a) Pour $k \in \mathbf{Z}$, déterminer l'unique fonction $A_k : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ telle que

$$\theta_k \;:\; \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,, \qquad (t,x) \mapsto A_k(t)\, \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,x}$$

vérifie $\theta_k(0,\cdot) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,\cdot}$ et $\partial_t \theta_k = \partial_x^2 \theta_k$.

(b) On considère la fonction $f\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}$-périodique, dont la restriction à $[0,1[$ est donnée par

$$[0,1[\to\mathbf{C}\,,\qquad x\mapsto \mathrm{e}^{-200\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,.$$

Calculer une approximation de θ, la solution de $\partial_t\theta=\partial_x^2\theta$, $\theta(0,\cdot)=f$, avec $N=1000$ en cent temps t équidistants entre 0 et $0,05$.
Représenter les (parties réelles des) valeurs calculées comme dans le premier exercice.

2. (a) Pour $M>0$, vérifier que si θ vérifie $\partial_t\theta=\partial_x^2\theta$ et $\theta^{[M]}$ est défini par

$$\theta^{[M]}(t,x)=\theta(t,2M(x-\tfrac{1}{2}))$$

alors

$$\partial_t\theta^{[M]}\ =\ \frac{1}{(2M)^2}\partial_x^2\theta^{[M]}$$

et que si $\theta(t,\cdot)$ est $2M\mathbf{Z}$-périodique, alors $\theta^{[M]}(t,\cdot)$ est $\mathbf{Z}$-périodique.

(b) Utiliser la question précédente avec $M=100$ pour calculer une approximation de paramètre $N=100000$, en cent temps t équidistants entre 0 et $0,05$ de la solution θ de $\partial_t\theta=\partial_x^2\theta$, $\theta(0,\cdot)=g$, où g est la fonction $200\mathbf{Z}$-périodique, dont la restriction à $[-100,100[$ est donnée par

$$[-100,100[\to\mathbf{C}\,,\qquad x\mapsto \mathrm{e}^{-200\,x^2}\,.$$

Représenter comme dans le premier exercice (avec des axes adaptés) les (parties réelles des) approximations de $\theta_{|[0,0{,}05]\times[-0{,}5,0{,}5]}$.

Exercise 4.

1. (a) Pour $k\in\mathbf{Z}$, déterminer l'unique fonction $A_k:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ telle que

$$\theta_k\ :\ \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{C}\,,\qquad (t,x)\mapsto\ A_k(t)\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,x}$$

vérifie $\theta_k(0,\cdot)=\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,\cdot}$ et $\mathrm{i}\partial_t\theta_k=\partial_x^2\theta_k$.

(b) On considère la fonction $f\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}$-périodique, dont la restriction à $[0,1[$ est donnée par

$$[0,1[\to\mathbf{C}\,,\qquad x\mapsto \mathrm{e}^{-200\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,.$$

Calculer une approximation de θ, la solution de $\mathrm{i}\partial_t\theta=\partial_x^2\theta$, $\theta(0,\cdot)=f$, avec $N=1000$ en cent temps t équidistants entre 0 et $0,05$.
Représenter les (parties réelles des) valeurs calculées comme dans le premier exercice.

2. (a) Pour $M>0$, vérifier que si θ vérifie $\mathrm{i}\partial_t\theta=\partial_x^2\theta$ et $\theta^{[M]}$ est défini par

$$\theta^{[M]}(t,x)=\theta(t,2M(x-\tfrac{1}{2}))$$

alors

$$\mathrm{i}\partial_t\theta^{[M]}\ =\ \frac{1}{(2M)^2}\partial_x^2\theta^{[M]}$$

et que si $\theta(t,\cdot)$ est $2M\mathbf{Z}$-périodique, alors $\theta^{[M]}(t,\cdot)$ est $\mathbf{Z}$-périodique.

(b) Utiliser la question précédente avec $M = 1000$ pour calculer une approximation de paramètre $N = 1000000$, en cent temps t équidistants entre 0 et $0,05$ de la solution θ de $\mathrm{i}\partial_t\theta = \partial_x^2\theta$, $\theta(0,\cdot) = g$, où g est la fonction $2000\mathbf{Z}$-périodique, dont la restriction à $[-1000, 1000[$ est donnée par

$$[-1000, 1000[\to \mathbf{C}\,, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-200\,x^2}\,.$$

Représenter comme dans le premier exercice (avec des axes adaptés) les (parties réelles des) approximations de $\theta_{|[0,0{,}05]\times[-5,5]}$.

Exercise 5.

1. (a) Pour $k \in \mathbf{Z}$, déterminer l'unique fonction $A_k : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ telle que

$$\theta_k \;:\; \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{C}\,, \qquad (t,x) \mapsto A_k(t)\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,x}$$

vérifie $\theta_k(0,\cdot) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,\cdot}$ et $\partial_t\theta_k = -\partial_x^3\theta_k$.

(b) On considère la fonction $f \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $\mathbf{Z}$-périodique, dont la restriction à $[0,1[$ est donnée par

$$[0,1[\to \mathbf{C}\,, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-200\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,.$$

Calculer une approximation de θ, la solution de $\partial_t\theta = -\partial_x^3\theta$, $\theta(0,\cdot) = f$, avec $N = 100000$ en cent temps t équidistants entre 0 et 20.

Représenter les (parties réelles des) valeurs calculées comme dans le premier exercice.

2. (a) Pour $M > 0$, vérifier que si θ vérifie $\partial_t\theta = -\partial_x^3\theta$ et $\theta^{[M]}$ est défini par

$$\theta^{[M]}(t,x) = \theta(t, 2M(x-\tfrac{1}{2}))$$

alors

$$\partial_t\theta^{[M]} \;=\; -\frac{1}{(2M)^3}\partial_x^3\theta^{[M]}$$

et que si $\theta(t,\cdot)$ est $2M\mathbf{Z}$-périodique, alors $\theta^{[M]}(t,\cdot)$ est $\mathbf{Z}$-périodique.

(b) Utiliser la question précédente avec $M = 1000$ pour calculer une approximation de paramètre $N = 100000$, en cent temps t équidistants entre 0 et $0,05$ de la solution θ de $\partial_t\theta = -\partial_x^3\theta$, $\theta(0,\cdot) = g$, où g est la fonction $2000\mathbf{Z}$-périodique, dont la restriction à $[-1000, 1000[$ est donnée par

$$[-1000, 1000[\to \mathbf{C}\,, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-200\,x^2}\,.$$

Représenter comme dans le premier exercice (avec des axes adaptés) les (parties réelles des) approximations de $\theta_{|[0,0{,}05]\times[-10,10]}$.