Université de Rennes Semestre printemps 2025-2026
M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Travaux pratiques n° 2
INITIATION À LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

Consigne : Au plus tard **le 9 avril 2026**, les étudiants doivent envoyer leur fichier `Jupyter` (extension `.ipynb`) à
— `ewan.contentin@univ-rennes.fr` pour les groupes Beaulieu ;
— `thomas.courant@ens-rennes.fr` pour le groupe Magistère.
Les questions portant un astérisque * ne sont pas utiles à la programmation et peuvent donc être sautées dans un premier temps.

On se propose de décrouvrir par les exemples la transformée de Fourier discrète comme outil de discrétisation des séries de Fourier et de leurs inverses.

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on introduira $x^{(N)} := (x_j^{(N)})_{j\in[\![0,N]\!]}$ où, pour $j \in [\![0, N]\!]$, $x_j^{(N)} := j/(N + 1)$.

Exercise 1.

1. Écrire un programme qui calcule le vecteur $y^{(N)} := (f(x_j^{(N)}))_{j\in[\![0,N]\!]}$ quand $N = 100$ et
$$f \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,, \qquad x \mapsto \sum_{k=-10}^{20} (20k + k^2)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\, k\, x}\,.$$
2. On note $z^{(N)}$ le vecteur obtenu en divisant par $(N+1)$ le résultat de la commande `numpy.fft.fft` appliquée à $y^{(N)}$, et $u^{(N)}$ le résultat de la commande `numpy.fft.fftshift` appliquée à $z^{(N)}$. Tracer sur une même figure les parties réelles de $z^{(N)}$ et $u^{(N)}$ en fonction des entiers de $[\![-50, 50]\!]$. On veillera à indiquer en légende quelle courbe est avec *shift*.
3. On note $v^{(N)}$ le vecteur obtenu en multipliant par $(N+1)$ le résultat de la commande `numpy.fft.ifft` appliquée à $z^{(N)}$. Tracer sur une même figure $y^{(N)}$ et la partie réelle de $v^{(N)}$ en fonction de $x^{(N)}$. On veillera à tracer un des graphes en pointillés.

Exercise 2.

1. Écrire un programme qui calcule le vecteur $y^{(N)} := (f(x_j^{(N)}))_{j\in[\![0,N]\!]}$ quand $N = 1000$ et
$$f \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,, \qquad x \mapsto \frac{1}{10} + \mathrm{e}^{-200\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(80\pi\, x\right)\,.$$
2. On note $u^{(N)}$ le vecteur obtenu en appliquant à $y^{(N)}$ d'abord `numpy.fft.fft` puis `numpy.fft.fftshift` et en divisant le tout par $(N + 1)$. On note $u^{(N)} =: (u_k^{(N)})_{k\in[\![-N/2,N/2]\!]}$ les coordonnées de $u^{(N)}$. Tracer la partie réelle de $(u_k^{(N)})_{k\in[\![-60,60]\!]}$ en fonction des entiers de $[\![-60, 60]\!]$.

3. Pour $k \in \mathbf{Z}$ et $a : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, on note

$$\theta_{a,k} \ : \ \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,, \qquad (t,x) \mapsto \ a(t)\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,x}\,.$$

   (a) Pour $k \in \mathbf{Z}$, déterminer l'unique fonction a telle que $\theta_{a,k}(0,\cdot) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,\cdot}$, $\partial_t\theta_{a,k}(0,\cdot)$ soit nul et $\partial_t^2\theta_{a,k} = \partial_x^2\theta_{a,k}$. On notera $A_k(t)$ la valeur en t de ce a.

   (b)* Pour $k \in \mathbf{Z}$, déterminer l'unique fonction a telle que $\partial_t\theta_{a,k}(0,\cdot) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,\cdot}$, $\theta_{a,k}(0,\cdot)$ soit nul et $\partial_t^2\theta_{a,k} = \partial_x^2\theta_{a,k}$.

4. On pose $t = 1/4$. Multiplier $u^{(N)}$ coordonnée par coordonnée par $(A_k(t))_{k\in[\![-N/2,N/2]\!]}$, puis appliquer au résultat `numpy.fft.ifftshift` puis `numpy.fft.ifft`. On multiplie encore par $N+1$ le résultat et l'on note $v^{(N)}$ le vecteur ainsi obtenu.
   Tracer sur une même figure $y^{(N)}$ et la partie réelle de $v^{(N)}$ en fonction de $x^{(N)}$.