**Université de Rennes** Semestre printemps 2024-2025

M1 Maths fondamentales Analyse avancée

---

**Travaux pratiques n° 2**

INITIATION À LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

---

**Consigne :** Au plus tard **le 8 avril 2025**, les étudiants doivent envoyer leur fichier `Jupyter` (extension `.ipynb`) à

— `luis-miguel.rodrigues@univ-rennes.fr` pour les groupes Beaulieu ;

— `Adrien.Laurent@inria.fr` pour le groupe Magistère.

Les questions portant un astérisque * ne sont pas utiles à la programmation et peuvent donc être sautées dans un premier temps.

---

On se propose de décrouvrir par les exemples la transformée de Fourier discrète comme outil de discrétisation des séries de Fourier et de leurs inverses.

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on introduira $x^{(N)} := (x_j^{(N)})_{j\in[\![0,N]\!]}$ où, pour $j \in [\![0, N]\!]$, $x_j^{(N)} := j/(N+1)$.

**Exercise 1.**

1. Écrire un programme qui calcule le vecteur $y^{(N)} := (f(x_j^{(N)}))_{j\in[\![0,N]\!]}$ quand $N = 100$ et
$$f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,, \qquad x \mapsto \sum_{k=-10}^{20} (20k + k^2)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,k\,x}\,.$$
2. On note $z^{(N)}$ le vecteur obtenu en divisant par $(N+1)$ le résultat de la commande `numpy.fft.fft` appliquée à $y^{(N)}$, et $u^{(N)}$ le résultat de la commande `numpy.fft.fftshift` appliquée à $z^{(N)}$. Tracer sur une même figure les parties réelles de $z^{(N)}$ et $u^{(N)}$ en fonction des entiers de $[\![-50, 50]\!]$. On veillera à indiquer en légende quelle courbe est avec *shift*.
3. On note $v^{(N)}$ le vecteur obtenu en multipliant par $(N+1)$ le résultat de la commande `numpy.fft.ifft` appliquée à $z^{(N)}$. Tracer sur une même figure $y^{(N)}$ et la partie réelle de $v^{(N)}$ en fonction de $x^{(N)}$. On veillera à tracer un des graphes en pointillés.

**Exercise 2.**

1. Écrire un programme qui calcule le vecteur $y^{(N)} := (f(x_j^{(N)}))_{j\in[\![0,N]\!]}$ quand $N = 1000$ et
$$f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,, \qquad x \mapsto \frac{1}{10} + \mathrm{e}^{-200\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(80\pi\,x\right)\,.$$
2. On note $u^{(N)}$ le vecteur obtenu en appliquant à $y^{(N)}$ d'abord `numpy.fft.fft` puis `numpy.fft.fftshift` et en divisant le tout par $(N+1)$. On note $u^{(N)} =: (u_k^{(N)})_{k\in[\![-N/2,N/2]\!]}$ les coordonnées de $u^{(N)}$. Tracer la partie réelle de $(u_k^{(N)})_{k\in[\![-60,60]\!]}$ en fonction des entiers de $[\![-60, 60]\!]$.

3. Pour $k \in \mathbf{Z}$ et $a : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, on note

$$\theta_{a,k} \; : \; \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,, \qquad (t,x) \mapsto \; a(t)\, \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,x}\,.$$

   (a) Pour $k \in \mathbf{Z}$, déterminer l'unique fonction $a$ telle que $\theta_{a,k}(0,\cdot) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,\cdot}$, $\partial_t \theta_{a,k}(0,\cdot)$ soit nul et $\partial_t^2 \theta_{a,k} = \partial_x^2 \theta_{a,k}$. On notera $A_k(t)$ la valeur en $t$ de ce $a$.

   (b)* Pour $k \in \mathbf{Z}$, déterminer l'unique fonction $a$ telle que $\partial_t \theta_{a,k}(0,\cdot) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,k\,\cdot}$, $\theta_{a,k}(0,\cdot)$ soit nul et $\partial_t^2 \theta_{a,k} = \partial_x^2 \theta_{a,k}$.

4. On pose $t = 1/4$. Multiplier $u^{(N)}$ coordonnée par coordonnée par $(A_k(t))_{k \in [\![ -N/2, N/2 ]\!]}$, puis appliquer au résultat `numpy.fft.ifftshift` puis `numpy.fft.ifft`. On multiplie encore par $N+1$ le résultat et l'on note $v^{(N)}$ le vecteur ainsi obtenu.
   Tracer sur une même figure $y^{(N)}$ et la partie réelle de $v^{(N)}$ en fonction de $x^{(N)}$.