Université de Rennes — Semestre printemps 2025-2026

M1 Maths fondamentales — Analyse avancée

Travaux pratiques n° 1

Initiation aux éléments finis

Consigne : Au plus tard **le 10 mars 2026**, les étudiants doivent envoyer leur fichier `Jupyter` (extension `.ipynb`) à

— `ewan.contentin@univ-rennes.fr` pour les groupes Beaulieu ;

— `thomas.courant@ens-rennes.fr` pour le groupe Magistère.

Les questions portant un astérisque * ne sont pas utiles à la programmation et peuvent donc être sautées dans un premier temps.

On rappelle que pour tout $f \in H^{-1}(]0,1[)$ il existe un unique $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que $-u'' = f$. De plus u est caractérisé de manière équivalente par $u \in H_0^1(]0,1[)$ et pour tout $v \in H_0^1(]0,1[)$, $a(u,v) = \langle f; v\rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ où

$$a \,:\, H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbf{R}\,, \qquad (v,w) \mapsto \int_0^1 v'\,w'\,.$$

Cela découle du théorème de Riesz et du fait que $\|\cdot\|_{\dot{H}^1}$ est une norme hilbertienne sur $H_0^1(]0,1[)$ de produit scalaire a.

On souhaite calculer une approximation numérique de u. Pour cela, on va d'abord choisir une suite $(V_N)_{N\in\mathbf{N}^\star}$ de sous-espaces de dimension fini de $H_0^1(]0,1[)$ tels que pour tout $v \in H_0^1(]0,1[)$ la distance de v à V_N tende vers zéro lorsque N tend vers l'infini. Puis pour chaque N on détermine alors $u_N \in V_N$ défini par pour tout $v \in V_N$

$$a(u_N, v) \,=\, \langle f; v\rangle_{H^{-1}, H_0^1}\,.$$

Faisons un choix concret d'espace. Soit $N \in \mathbf{N}$. On introduit pour $j \in [\![0, N+1]\!]$, $x_j^{(N)} := j/(N+1)$. On choisit V_N comme étant l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0 et en 1 et affines sur chaque $[x_j^{(N)}, x_{j+1}^{(N)}]$, $j \in [\![0, N]\!]$.

1. Pour chaque $j \in [\![1, N]\!]$, exprimer explicitement l'unique élément $\varphi_j^{(N)}$ de V_N tel que pour $\ell \in [\![1, N]\!]$ $\varphi_j^{(N)}(x_\ell^{(N)})$ soit nul si $\ell \neq j$ et égal à 1 si $\ell = j$.
2. Vérifier que $(\varphi_1^{(N)}, \cdots, \varphi_N^{(N)})$ forme une base de V_N et en déterminer une base duale.

3.* Montrer que si u et u_N sont définis comme ci-dessus, alors

$$\|u - u_N\|_{\dot{H}^1} \,=\, \min_{v\in V_N} \|u - v\|_{\dot{H}^1}\,.$$

4.* Montrer qu'il existe une constante C_0 indépendante de N telle que si $w \in H_0^1(]0,1[) \cap H^2(]0,1[)$, alors

$$\min_{v\in V_N} \|w - v\|_{\dot{H}^1} \leq \frac{C_0}{N+1}\,\|w\|_{H^2}\,.$$

5.* En déduire que pour tout $w \in H_0^1(]0,1[)$, alors

$$\min_{v \in V_N} \|w - v\|_{\dot{H}^1} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

6. Déterminer la matrice $A_N \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ symétrique associée à la forme bilinéaire $a_{|V_N \times V_N}$ dans la base $(\varphi_1^{(N)}, \cdots, \varphi_N^{(N)})$.
7. À partir de maintenant on se restreindra au cas particulier où f est la fonction constante égale à 1, au sens où pour tout $w \in H_0^1(]0,1[)$

$$\langle f; w \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \;=\; \int_0^1 w \;\;.$$

   Déterminer $f_N \in \mathbf{R}^N$ tel que $f_{|V_N}$ soit donné dans la base $(\varphi_1^{(N)}, \cdots, \varphi_N^{(N)})$ par le produit scalaire avec f_N.
8. Écrire un programme qui calcule les coordonnées de u_N dans la base $(\varphi_1^{(N)}, \cdots, \varphi_N^{(N)})$ et tracer le graphe de u_N quand $N = 7$.
9. Déterminer explicitement u et tracer son graphe en pointillé sur la même figure que celui de u_7. On veillera à tracer le graphe de u avec une grille assez fine.
10. Nous allons maintenant garder le même terme source, la même suite d'espaces et la même base mais changer la forme bilinéaire. Soit $\varepsilon > 0$. On considère

$$b_\varepsilon \;:\; H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbf{R}\,, \qquad (v,w) \mapsto \int_0^1 v\,w + \varepsilon \int_0^1 v'\,w'\,.$$

   (a) Déterminer la matrice symétrique associée à la forme bilinéaire $(b_\varepsilon)_{|V_N \times V_N}$ dans la base $(\varphi_1^{(N)}, \cdots, \varphi_N^{(N)})$.

   (b) On note $v_{N,\varepsilon}$ l'unique $v_{N,\varepsilon} \in V_N$ tel que pour tout $w \in V_N$

$$b_\varepsilon(v_{N,\varepsilon}, w) \;=\; \langle f; w \rangle_{H^{-1}, H_0^1}\,.$$

   Écrire un programme qui calcule les coordonnées de $v_{N,\varepsilon}$ dans la base $(\varphi_1^{(N)}, \cdots, \varphi_N^{(N)})$ et tracer le graphe de $v_{N,\varepsilon}$ quand $N = 1000$ et $\varepsilon = 0.001$.

   (c) Tracer sur cette même figure le graphe de la fonction constante égale à 1.