
Travaux pratiques n° 1
INITIATION AUX ÉLÉMENTS FINIS

Consigne : Au plus une semaine après la séance, les étudiants doivent envoyer leur fichier **Jupyter** (extension `.ipynb`) à

- `luis-miguel.rodriques@univ-rennes.fr` pour les groupes Beaulieu ;
- `Adrien.Laurent@inria.fr` pour le groupe Magistère.

Les questions portant un astérisque ***** ne sont pas utiles à la programmation et peuvent donc être sautées dans un premier temps.

On rappelle que pour tout $f \in H^{-1}(]0, 1[)$ il existe un unique $u \in H_0^1(]0, 1[)$ tel que $-u'' = f$. De plus u est caractérisé de manière équivalente par $u \in H_0^1(]0, 1[)$ et pour tout $v \in H_0^1(]0, 1[)$, $a(u, v) = \langle f; v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ où

$$a : H_0^1(]0, 1[) \times H_0^1(]0, 1[) \rightarrow \mathbf{R}, \quad (v, w) \mapsto \int_0^1 v' w' .$$

Cela découle du théorème de Riesz et du fait que $\|\cdot\|_{\dot{H}^1}$ est une norme hilbertienne sur $H_0^1(]0, 1[)$ de produit scalaire a .

On souhaite calculer une approximation numérique de u . Pour cela, on va d'abord choisir une suite $(V_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ de sous-espaces de dimension fini de $H_0^1(]0, 1[)$ tels que pour tout $v \in H_0^1(]0, 1[)$ la distance de v à V_N tende vers zéro lorsque N tend vers l'infini. Puis pour chaque N on détermine alors $u_N \in V_N$ défini par pour tout $v \in V_N$

$$a(u_N, v) = \langle f; v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} .$$

Faisons un choix concret d'espace. Soit $N \in \mathbf{N}$. On introduit pour $j \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$, $x_j^{(N)} := j/(N+1)$. On choisit V_N comme étant l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, nulles en 0 et en 1 et affines sur chaque $[x_j^{(N)}, x_{j+1}^{(N)}]$, $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

1. Pour chaque $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, exprimer explicitement l'unique élément $\varphi_j^{(N)}$ de V_N tel que pour $\ell \in \llbracket 1, N \rrbracket$ $\varphi_j^{(N)}(x_\ell^{(N)})$ soit nul si $\ell \neq j$ et égal à 1 si $\ell = j$.
2. Vérifier que $(\varphi_1^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)})$ forme une base de V_N et en déterminer une base duale.
- 3* Montrer que si u et u_N sont définis comme ci-dessus, alors

$$\|u - u_N\|_{\dot{H}^1} = \min_{v \in V_N} \|u - v\|_{\dot{H}^1} .$$

- 4* Montrer qu'il existe une constante C_0 indépendante de N telle que si $w \in H_0^1(]0, 1[) \cap H^2(]0, 1[)$, alors

$$\min_{v \in V_N} \|w - v\|_{\dot{H}^1} \leq \frac{C_0}{N+1} \|w\|_{H^2} .$$

5* En déduire que pour tout $w \in H_0^1(]0, 1[)$, alors

$$\min_{v \in V_N} \|w - v\|_{\dot{H}^1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

6. Déterminer la matrice $A_N \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ symétrique associée à la forme bilinéaire $a|_{V_N \times V_N}$ dans la base $(\varphi_1^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)})$.
7. À partir de maintenant on se restreindra au cas particulier où f est la fonction constante égale à 1, au sens où pour tout $w \in H_0^1(]0, 1[)$

$$\langle f; w \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_0^1 w.$$

Déterminer $f_N \in \mathbf{R}^N$ tel que $f|_{V_N}$ soit donné dans la base $(\varphi_1^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)})$ par le produit scalaire avec f_N .

8. Écrire un programme qui calcule les coordonnées de u_N dans la base $(\varphi_1^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)})$ et tracer le graphe de u_N quand $N = 7$.
9. Déterminer explicitement u et tracer son graphe en pointillé sur la même figure que celui de u_7 . On veillera à tracer le graphe de u avec une grille assez fine.
10. Nous allons maintenant garder le même terme source, la même suite d'espaces et la même base mais changer la forme bilinéaire. Soit $\varepsilon > 0$. On considère

$$b_\varepsilon : H_0^1(]0, 1[) \times H_0^1(]0, 1[) \rightarrow \mathbf{R}, \quad (v, w) \mapsto \int_0^1 v w + \varepsilon \int_0^1 v' w'.$$

- (a) Déterminer la matrice symétrique associée à la forme bilinéaire $(b_\varepsilon)|_{V_N \times V_N}$ dans la base $(\varphi_1^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)})$.
- (b) On note $v_{N,\varepsilon}$ l'unique $v_{N,\varepsilon} \in V_N$ tel que pour tout $w \in V_N$

$$b_\varepsilon(v_{N,\varepsilon}, w) = \langle f; w \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Écrire un programme qui calcule les coordonnées de $v_{N,\varepsilon}$ dans la base $(\varphi_1^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)})$ et tracer le graphe de $v_{N,\varepsilon}$ quand $N = 1000$ et $\varepsilon = 0.001$.

- (c) Tracer sur cette même figure le graphe de la fonction constante égale à 1.