Université de Rennes Semestre printemps 2024-2025

M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Feuille d'exercices n° 6

ANALYSE DE FOURIER & ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Dans la suite, on utilise le convention de Fourier suivante

$$\mathcal{F}(u)(\xi) \;=\; \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \xi \in \mathbf{R}^d\,.$$

On utilisera aussi l'identification canonique des fonctions $u\,:\,X\times Y\to Z$, $(t,x)\mapsto u(t,x)$ avec les fonctions $X\to Z^Y$, $t\mapsto u(t,\cdot)$.

Exercise 1. Soit $d\in\mathbf{N}^*$ et $P\in\mathbf{C}[X_1,\cdots,X_d]$ un polynôme de degré $M\in\mathbf{N}$ tel qu'il existe $R>0$ et $C>0$ tel que, pour tout $\xi\in\mathbf{R}^d$ tel que $\|\xi\|\geq R$, l'on ait $|P(\mathrm{i}\xi)|\geq C\,\|\xi\|^M$.

1. Montrer que si $d=1$ tout polynôme non nul vérifie l'hypothèse.
2. Pour $d\geq 2$ donner un exemple de polynôme ne s'annulant pas sur $\mathrm{i}\mathbf{R}^d$ mais ne vérifiant pas l'hypothèse.
3. On suppose de plus que P ne s'annule pas sur $\mathrm{i}\mathbf{R}^d$.
   Montrer que pour tout $f\in L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})$ il existe un unique $u\in H^M(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})$ tel que $P(\nabla)u=f$.

Exercise 2. Soit $d\in\mathbf{N}^*$ et $P\in\mathbf{C}[X_1,\cdots,X_d]$ un polynôme de degré $M\in\mathbf{N}$ tel que

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^d}\mathrm{Re}(P(\mathrm{i}\xi)) \;<\; +\infty\,.$$

1. Déterminer à quelle condition sur $\alpha\in\mathbf{C}$ le polynôme P défini par $P(\nabla)=\alpha\Delta$ vérifie l'hypothèse.
2. Montrer que, pour tout $t\geq 0$, l'application linéaire

   $$S(t)\;:\;L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})\to L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})\,,\quad u_0\mapsto\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{t\,P(\mathrm{i}\,\cdot\,)}\,\mathcal{F}(u_0))$$

   est bien définie et continue.
3. Soit $u_0\in L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})$. On considère

   $$u\;:\;\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{C}\,,\quad (t,x)\mapsto S(t)(u_0)(x)\,.$$

   (a) Montrer que $u\in\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+;L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}))$.

   (b) Montrer que si de plus $u_0\in H^M(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})$ alors
   $u\in\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+;H^M(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}))\cap\mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+;L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}))$, $\partial_t u=P(\nabla)u$ et $u(0,\cdot)=u_0$.
4. Montrer que si $T>0$, $u\in\mathcal{C}^0([0,T];H^d(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}))\cap\mathcal{C}^1([0,T];L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}))$ avec $\partial_t u=P(\nabla)u$ et $v\in\mathcal{C}^0([0,T];H^d(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}))\cap\mathcal{C}^1([0,T];L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}))$, alors

   $$\langle u(T,\cdot);v(T,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})} \;=\; \langle u(0,\cdot);v(0,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})} + \int_0^T \langle u(s,\cdot);(\partial_t v+\overline{P}(-\nabla)v)(s,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})}\,\mathrm{d}s\,.$$
5. En déduire que pour tout $u_0\in H^M(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})$, il existe un unique
   $u\in\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+;H^M(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}))\cap\mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+;L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}))$ tel que $\partial_t u=P(\nabla)u$ et $u(0,\cdot)=u_0$.