

Feuille d'exercices n° 5

SÉRIES DE FOURIER & ESPACES FONCTIONNELS

Dans la suite, on utilise la convention de Fourier suivante

$$c_j^T(u) := \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\frac{2i\pi j}{T}x} u(x) dx.$$

Exercice 1. Soit $T > 0$.

1. Soit $2 \leq p \leq \infty$ et p' son indice de Lebesgue dual. Montrer que
 - si $u \in L^{p'}([0, T])$, alors $(c_j^T(u))_{j \in \mathbf{Z}} \in \ell^p(\mathbf{Z})$ avec

$$\|(c_j^T(u))_{j \in \mathbf{Z}}\|_{\ell^p(\mathbf{Z})} \leq T^{-\frac{1}{p'}} \|u\|_{L^{p'}([0, T])}$$

- si $u \in L^1([0, T])$ est tel que $(c_j^T(u))_{j \in \mathbf{Z}} \in \ell^{p'}(\mathbf{Z})$, alors $u \in L^p([0, T])$ avec

$$\|u\|_{L^p([0, T])} \leq T^{\frac{1}{p}} \|(c_j^T(u))_{j \in \mathbf{Z}}\|_{\ell^{p'}(\mathbf{Z})}$$

2. Pour tout $s \geq 0$ et $1 \leq p \leq \infty$, on munit

$$X^{s,p} := \left\{ u \in L^1([0, T]) ; ((1 + |j|^s) c_j^T(u))_{j \in \mathbf{Z}} \in \ell^{p'}(\mathbf{Z}) \right\}$$

de $\|\cdot\|_{X^{s,p}}$ défini par

$$\|u\|_{X^{s,p}} := \|u\|_{\dot{X}^{0,p}} + \|u\|_{\dot{X}^{s,p}}$$

où p' est l'indice dual de p et pour $\eta \geq 0$

$$\|u\|_{\dot{X}^{\eta,p}} = \|(|j|^\eta c_j^T(u))_{j \in \mathbf{Z}}\|_{\ell^{p'}(\mathbf{Z})}$$

avec la convention que $0^0 = 1$.

- (a) Vérifier que pour tout $s \geq 0$ et $1 \leq p \leq \infty$, $X^{s,p}$ est un espace vectoriel normé et que, si $s - \frac{1}{p} > -\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{p}$, $X^{s,p}$ est un espace de Banach.
- (b) Montrer que si $0 \leq s_0 \leq s_1$, $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in X^{s_0,p} \cap X^{s_1,p}$, alors pour tout $\theta \in [0, 1]$, en posant $s_\theta := (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$, on a $u \in X^{s_\theta,p}$ avec

$$\|u\|_{\dot{X}^{s_\theta,p}} \leq \|u\|_{\dot{X}^{s_0,p}}^{1-\theta} \|u\|_{\dot{X}^{s_1,p}}^\theta.$$

- (c) Montrer que si $1 \leq p \leq \infty$ et $s > \frac{1}{p}$, il existe $C > 0$ tel que si $u \in X^{s,p}$, alors u possède un représentant continu et

$$\left\| u - \frac{1}{T} \int_0^T u \right\|_{L^\infty([0, T])} \leq C \|u\|_{\dot{X}^{0,p}}^{1-\theta} \|u\|_{\dot{X}^{s,p}}^\theta$$

où θ est déterminé par

$$0 = (1 - \theta) \left(-\frac{1}{p} \right) + \theta \left(s - \frac{1}{p} \right).$$

Exercise 2. Soit $T > 0$.

1. Soit $v \in L^2_{loc}(\mathbf{R})$ $T\mathbf{Z}$ -périodique, $u = v|_{]0,T[}$ et $M > 0$ tel que

$$\|u\|_M := \|(e^{\frac{2\pi|j|}{T}M} c_j^T(u))_{j \in \mathbf{Z}}\|_{\ell^1(\mathbf{Z})} < \infty.$$

Montrer que v possède une unique extension continue $T\mathbf{Z}$ -périodique à $\mathbf{R} + i[-M, M]$ qui est analytique sur $\mathbf{R} + i] - M, M[$, et si on note w cette extension

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbf{R}+i[-M,M])} \leq \|u\|_M$$

et pour tout $0 \leq M' < M$ et tout $k \in \mathbf{N}$

$$\|w^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbf{R}+i[-M',M'])} \leq \frac{\|u\|_M}{(M - M')^k} \sup_{a \in \mathbf{R}^+} (a^k e^{-a}) \leq \frac{k! \|u\|_M}{(M - M')^k}.$$

2. Soit $M > 0$ et $w : \mathbf{R} + i[-M, M] \rightarrow \mathbf{C}$ continue $T\mathbf{Z}$ -périodique, analytique sur $\mathbf{R} + i] - M, M[$.

Montrer que si on note $u = w|_{]0,T[}$, alors

$$\|(e^{\frac{2\pi|j|}{T}M} c_j^T(u))_{j \in \mathbf{Z}}\|_{\ell^\infty(\mathbf{Z})} \leq \|w\|_{L^\infty(\mathbf{R}+i[-M,M])}$$

et pour tout $0 \leq M' < M$

$$\|u\|_{M'} \leq \frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{T}(M-M')}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{T}(M-M')}} \|w\|_{L^\infty(\mathbf{R}+i[-M,M])}.$$