
Feuille d'exercices n° 3

Dualité et formulations variationelles

Exercise 1. Soit (E,μ) un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(E)$.
Donner explicitement $g \in L^{p'}(E)$ non nul tel que

$$\int_E f\, g\, \mathrm{d}\mu \;=\; \|f\|_{L^p(E)}\, \|g\|_{L^{p'}(E)}$$

où p' est le dual de Lebesgue de p.

Exercise 2. *Lemme $TT^\star$.*

1. Montrer que si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert, $T :\; H_1 \to H_2$ est linéaire continu et $T^\star$ note l'adjoint hilbertien de T, alors

$$\|T\|_{H_1\to H_2} = \|T^\star\|_{H_2\to H_1} = \sqrt{\|T\,T^\star\|_{H_2\to H_2}}\,.$$

2. Soit $d \in \mathbf{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$. Définissons

$$T : \quad \mathbf{R}^d \to L^2([0,1];\mathbf{R}^d)$$

par pour tout $X_0 \in \mathbf{R}^d$

$$T(X_0) : \quad [0,1] \to \mathbf{R}^d\,, \quad t \mapsto \mathrm{e}^{t\,A} X_0$$

(où l'on identifie les vecteurs de $\mathbf{R}^d$ à des vecteurs colonnes).

   (a) Vérifier que T est une application linéaire continue.

   (b) Calculer $T^\star$ l'adjoint hilbertien de T puis $TT^\star$.

   (c) Supposons de plus que $A^\star = -A$. Déterminer $S :\; [0,1] \to \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ tel que pour tout $\varphi \in L^2([0,1];\mathbf{R}^d)$ et tout $t \in [0,1]$

$$TT^\star(\varphi)(t) \;=\; \int_0^1 S(t-s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Exercise 3. *Résolutions explicites.*

1. Donner explicitement $u \in H^1(\mathbf{R}_+)$ tel que pour tout $v \in H^1(\mathbf{R}_+)$

$$\int_{\mathbf{R}_+} (u\,v + u'\,v') \;=\; v(0)\,.$$

2. Donner explicitement $u \in H^1(\mathbf{R})$ tel que $u - u'' = \delta_0$.

3. Pour $f \in L^2([-1,1])$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ donner explicitement $u \in H^2(]-1,1[)$ tel que

$$u - u'' = f\,, \qquad u'(-1) = \alpha \qquad \text{et} \qquad u'(1) = \beta\,.$$

4. Pour $f \in L^2([0,1])$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ donner explicitement $u \in H^2(]0,1[)$ tel que

$$-u'' = f\,, \qquad u(0) = \alpha \qquad \text{et} \qquad u(1) = \beta\,.$$

5. Pour $f \in L^2([0,1])$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ déterminer à quelle condition il existe $u \in H^2(]0,1[)$ tel que

$$-u'' = f\,, \qquad u'(0) = \alpha \qquad \text{et} \qquad u'(1) = \beta\,.$$