Feuille d'exercices n° 2

Espaces de Sobolev

Exercise 1. *Rappels de distribution.*

1. Soit $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. On définit
$$f \,:\, \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \quad x \mapsto \int_0^x g\,.$$
Montrer que $f' = g$ (au sens des distributions).
2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ une distribution telle que u' soit nulle. Montrer que u est constante.
3. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R})$ tel que $g_- := (u_{|\mathbf{R}^\star_-})' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^*_-)$ et $g_+ := (u_{|\mathbf{R}^\star_+})' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^*_+)$ avec g_- et g_+ intégrables au voisinage de 0.
Montrer que $u' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ et que
$$u'(x) \;=\; \begin{cases} g_-(x) & \text{si } x < 0; \\ g_+(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercise 2. *Différences finies.*

Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$.

1. Montrer que si $1 \leq p \leq \infty$ et $u' \in L^p(\mathbf{R})$ alors $((u(\cdot + h) - u)/h)_{h>0}$ est bornée dans $L^p(\mathbf{R})$.
2. Montrer que si $1 < p \leq \infty$ et $((u(\cdot + h) - u)/h)_{h>0}$ est bornée dans $L^p(\mathbf{R})$ alors $u' \in L^p(\mathbf{R})$.
3. Donner un contre-exemple à l'implication précédente quand $p = 1$.

Exercise 3. *Exponentielles oscillantes.*

Pour $\varepsilon > 0$, on définit
$$u_\varepsilon \,:\,]0,1[\to \mathbf{C}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{\varepsilon}}\,.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, il existe $0 < c_k \leq C_k$ tel que pour tout $1 \leq p \leq \infty$, pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$
$$\frac{c_k}{\varepsilon^k} \;\leq\; \|u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(]0,1[)} \;\leq\; \frac{C_k}{\varepsilon^k}\,.$$
2. Déduire que l'injection de $L^\infty(]0,1[;\mathbf{C})$ dans $L^1(]0,1[;\mathbf{C})$ n'est pas compacte.

Exercise 4. *Un exemple d'échec d'injection.*

Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on définit $u_n :]0,1[\to \mathbf{R}$ continue par les conditions suivantes

— u_n est constante égale à 1 sur $]\,0, \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)}]$;

— u_n est constante égale à 0 sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{(n+2)}, 1\,[$;

— u_n est affine sur $[\,\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)}, \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+2)}]$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est bornée dans $L^\infty(]0,1[) \cap W^{1,1}(]0,1[)$, mais bornée dans aucun $W^{\frac{1}{p},p}(]0,1[)$ quand $1 < p < \infty$.

Exercise 5. *Masse de Dirac.*

1. Expliquer pourquoi la masse de Dirac à l'origine δ_0, vue comme une mesure sur $\mathbf{R}$, appartient à $W^{s,1}(\mathbf{R})$ pour tout $s < 0$.
2. Montrer que $\delta_0 \in W^{-1,\infty}(\mathbf{R})$.

Exercise 6. *Passage au non linéaire.*

Soit $(k,p) \in \mathbf{N} \times [1,\infty]$ tel que $k - \frac{1}{p} \neq 0$. On admettra qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $\ell \in [\![0,k]\!]$, pour tout $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$,

$$\|u^{(\ell)}\|_{L^{q_\ell}(\mathbf{R})} \le C\, \|u^{(k)}\|_{L^p(\mathbf{R})}^{\frac{\ell}{k}}\, \|u\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^{1-\frac{\ell}{k}}$$

où q_ℓ est défini par

$$\frac{1}{q_\ell} := \frac{\ell}{k}\frac{1}{p}\,.$$

Montrer qu'il existe $C' > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ et $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$,

$$\|(u\,v)^{(k)}\|_{L^p(\mathbf{R})} \le C' \left(\|u^{(k)}\|_{L^p(\mathbf{R})}\, \|v\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + \|u\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\, \|v^{(k)}\|_{L^p(\mathbf{R})} \right)\,.$$