
Feuille d'exercices n° 1

Espaces de Lebesgue

Dans tout ce qui suit, $N \in \mathbf{N}^*$, 0_N note l'origine de $\mathbf{R}^N$, les normes sur $\mathbf{R}^N$ sont les normes euclidiennes canoniques et par défaut la mesure sur les ouverts de $\mathbf{R}^N$ est la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. *Injections.*

1. Soit $(p, p_0, p_1) \in [1, \infty]^3$ avec $p_0 \leq p_1$ et tel qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^{p_0}(\mathbf{R}^N) \cap L^{p_1}(\mathbf{R}^N)$, l'on ait $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ et
$$\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq C \left(\|f\|_{L^{p_0}(\mathbf{R}^N)} + \|f\|_{L^{p_1}(\mathbf{R}^N)} \right)$$
Montrer que $p \in [p_0, p_1]$.
2. Montrer que si (E, μ) est un espace mesuré, $(p, p_0, p_1) \in [1, \infty]^3$ et $\theta \in [0, 1]$ sont tels que
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$
alors pour tout $f \in L^{p_0}(E) \cap L^{p_1}(E)$, l'on a $f \in L^p(E)$ et
$$\|f\|_{L^p(E)} \leq \|f\|_{L^{p_0}(E)}^{1-\theta} \|f\|_{L^{p_1}(E)}^{\theta}.$$
3. Montrer que pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\ell^1(\mathbf{Z}^N) \subset \ell^p(\mathbf{Z}^N)$ et $\|\cdot\|_{\ell^p(\mathbf{Z}^N)} \leq \|\cdot\|_{\ell^1(\mathbf{Z}^N)}$.

Exercice 2. *Monômes.*
Soit $\sigma \in \mathbf{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$. Considérons
$$f : B(0_N, 1) \setminus \{0_N\} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \|x\|^\sigma, \qquad \text{et} \qquad g : \mathbf{R}^N \setminus \overline{B}(0_N, 1) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \|x\|^\sigma.$$

1. À quelle condition a-t-on $f \in L^p(B(0_N, 1) \setminus \{0_N\})$?
2. À quelle condition a-t-on $g \in L^p(\mathbf{R}^N \setminus \overline{B}(0_N, 1))$?

Exercice 3. *Opérateur de multiplication.*
Soit (E, μ) un espace mesuré σ-fini, $m : E \to \mathbf{R}$ mesurable et $1 \leq p \leq \infty$.
Pour tout $u : E \to \mathbf{R}$ mesurable, on note $T_m(u) := m\,u$.

1. À quelle condition sur m a-t-on $T_m(u) \in L^p(E)$ pour tout $u \in L^p(E)$?
2. Dans ce cas, que vaut la norme d'opérateur $\|T_m\|_{L^p(E) \to L^p(E)}$?

Exercice 4. *Interpolation complexe.*

1. *Théorème des trois droites, méthode de Phragmen-Lindelöf.* Pour $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, on pose

$$\Delta_{a,b} := \{\, z \in \mathbf{C}\,;\; a < \mathrm{Re}(z) < b \,\}\,, \qquad\qquad \mathcal{D}_\alpha := \{\, z \in \mathbf{C}\,;\; \mathrm{Re}(z) = \alpha \,\}\,.$$

   (a) Montrer que $f :\ \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto \exp(\,\mathrm{i}\,\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,z))$ est holomorphe telle que $f_{|\mathcal{D}_0}$ et $f_{|\mathcal{D}_1}$ soient bornées mais que $f_{|\Delta_{0,1}}$ soit non bornée.

   (b) Soit f une fonction complexe continue sur $\overline{\Delta_{0,1}}$, holomorphe sur $\Delta_{0,1}$.

      i. Montrer que

$$\text{si} \lim_{R \to \pm\infty} \max_{0 \le r \le 1} |f(r + \mathrm{i}R)| \,=\, 0\,, \qquad \text{alors} \qquad \sup_{\Delta_{0,1}} |f| \,\le\, \max\left(\sup_{\mathcal{D}_0} |f| \;;\; \sup_{\mathcal{D}_1} |f| \right)\,.$$

      ii. En déduire que si pour tout $\omega > 0$, la fonction $\Delta_{0,1} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto \exp(-\omega\,|\mathrm{Im}(z)|^2)\, f(z)$ est bornée, alors f est bornée sur $\Delta_{0,1}$ et pour tout $0 \le \theta \le 1$

$$\sup_{\mathcal{D}_\theta} |f| \,\le\, \left(\sup_{\mathcal{D}_0} |f| \right)^{1-\theta} \left(\sup_{\mathcal{D}_1} |f| \right)^{\theta}\,.$$

      Indication : considérer, pour $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $f_{\lambda,\varepsilon} :\ \overline{\Delta_{0,1}} \to \mathbf{C},\ z \mapsto \exp(\varepsilon z^2 + \lambda z)\, f(z)$.

2. *Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.* Soit (E,μ) et (F,ν) deux espaces mesurés σ-finis.
Soit $1 \le p_0, p_1 \le \infty$ et $1 \le q_0, q_1 \le \infty$ et une application linéaire

$$T \,:\, L^{p_0}(E) + L^{p_1}(E) \to L^{q_0}(F) + L^{q_1}(F)$$

telle que $T(L^{p_0}(E)) \subset L^{q_0}(F)$ et $T(L^{p_1}(E)) \subset L^{q_1}(F)$.
Soit $0 \le \theta \le 1$. On définit $1 \le p_\theta \le \infty$ et $1 \le q_\theta \le \infty$ par

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\,, \qquad\qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}\,.$$

   (a) Rappeler pourquoi $L^{p_\theta}(E) \subset L^{p_0}(E) + L^{p_1}(E)$.

   (b) Soit g une fonction simple mesurable sur E de support de mesure finie et h une fonction simple mesurable sur F de support de mesure finie. Montrer qu'il existe f une fonction complexe continue et bornée sur $\overline{\Delta_{0,1}}$, holomorphe sur $\Delta_{0,1}$, telle que

$$f(\theta) \,=\, \int_F T(g)\, h \,\mathrm{d}\nu\,,$$

   et

$$\sup_{\mathcal{D}_0} |f| \,\le\, \|T\|_{L^{p_0} \to L^{q_0}}\, \|g\|_{L^{p_\theta}}^{\frac{p_\theta}{p_0}}\, \|h\|_{L^{q'_\theta}}^{\frac{q'_\theta}{q'_0}}\,, \qquad \sup_{\mathcal{D}_1} |f| \,\le\, \|T\|_{L^{p_1} \to L^{q_1}}\, \|g\|_{L^{p_\theta}}^{\frac{p_\theta}{p_1}}\, \|h\|_{L^{q'_\theta}}^{\frac{q'_\theta}{q'_1}}\,,$$

   où, pour $r \in [1,\infty]$, r' est l'indice de Lebesgue dual de r.

   (c) En déduire que $T(L^{p_\theta}(E)) \subset L^{q_\theta}(F)$ et que

$$\|T\|_{L^{p_\theta} \to L^{q_\theta}} \le \left(\|T\|_{L^{p_0} \to L^{q_0}}\right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{L^{p_1} \to L^{q_1}}\right)^{\theta}\,.$$

3. Redémontrer les inégalités de Young sur les produits de convolution à partir du résultat de la question précédente.

4. *Test de Schur.* Soit (E,μ) et (F,ν) deux espaces mesurés σ-finis et $K : E \times F \to \mathbf{R}$ telle que pour presque tout $x \in E$, $K(x,\cdot) \in L^1(F)$ et pour presque tout $y \in F$, $K(\cdot,y) \in L^1(E)$ avec

$$\|K\|_{L^\infty(E;L^1(F))} := \operatorname{esssup}_{x\in E} \|K(x,\cdot)\|_{L^1(F)} < +\infty$$

et

$$\|K\|_{L^\infty(F;L^1(E))} := \operatorname{esssup}_{y\in F} \|K(\cdot,y)\|_{L^1(E)} < +\infty\,.$$

Montrer que l'application

$$(L^1 \cap L^\infty)(F) \to (L^1 \cap L^\infty)(E)\,, \qquad f \mapsto \int_F K(\cdot,y)\, f(y)\, \mathrm{d}\nu(y)$$

est bien définie et, pour tout $1 < p < \infty$, peut être étendue en une application $T_p : L^p(F) \to L^p(E)$ avec

$$\|T_p\|_{L^p(F)\to L^p(E)} \leq \left(\|K\|_{L^\infty(E;L^1(F))}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\|K\|_{L^\infty(F;L^1(E))}\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$