
Feuille d'exercices n° 0

PRÉREQUIS

Exercice 1. Soit (E, μ) un espace mesuré, $\omega : E \to \mathbf{R}_+$ et $f : E \to \mathbf{R}$ mesurables, $(s_0, s_1) \in \mathbf{R}^2$, $(p_0, p_1) \in [1, \infty]^2$ et $\theta \in [0, 1]$. On définit $(s_\theta, p_\theta) \in \mathbf{R} \times [1, \infty]$ par

$$s_\theta = s_0\,(1-\theta) + s_1\,\theta\,, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\,.$$

Montrer que

$$\|\omega^{s_\theta}\, f\|_{L^{p_\theta}} \leq \|\omega^{s_0}\, f\|_{L^{p_0}}^{1-\theta}\, \|\omega^{s_1}\, f\|_{L^{p_1}}^{\theta}\,.$$

Exercice 2. On note δ_0 la masse de Dirac en 0 vue comme distribution sur $\mathbf{R}$.

1. Déterminer toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que $u' = \delta_0$.
2. Déterminer la seule distribution impaire $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $u' = \delta_0$.
3. Déterminer la seule distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $u' = \delta_0$ dont le support est inclus dans $\mathbf{R}_+$.

Exercice 3. On choisit la convention suivante des coefficients de Fourier $T\mathbf{Z}$-périodiques : pour une fonction L^1_{loc} $T\mathbf{Z}$-périodique ses coefficients de Fourier $T\mathbf{Z}$-périodiques sont définis par

$$c_j^T(u) \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi\, j}{T}\, x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad j \in \mathbf{Z}\,.$$

Déterminer les coefficients de Fourier $\mathbf{Z}$-périodiques des fonctions suivantes.

1. $\cos(2\pi\,\cdot)$
2. $\sin(8\pi\,\cdot)$
3. $1 + \cos(4\pi\,\cdot) + \sin(8\pi\,\cdot)$
4. $\cos(2\pi\,\cdot)^2 + \sin(8\pi\,\cdot)^3$
5. $\cos(2\pi\,\cdot)\,\sin(8\pi\,\cdot)$
6. $\cos(2\pi\,\cdot)\,\sin(2\pi\,\cdot)^4$